SKRYPTY

# MATEMATYKA

Skrypt

*Jan Hauke*

Poznań 2013

Recenzent: dr Tomasz Kosowski

**Skrypt zawiera materiały dydaktyczne**
**z elementów matematyki wyższej**



Wydawnictwo Paweł Churski
ul. J. Łukaszewicza 25/2
60-729 Poznań

**ISBN 978-83-930742-5-9**

# ZAMIAST WSTĘPU

Skrypt zawiera elementy matematyki wyższej z zakresu czterech istotnych i podstawowych jej części: funkcji i ich własności, pochodnych, całek oraz algebry macierzy. Przedstawiony materiał zawiera powtórzenie i uzupełnienie wiedzy matematycznej z zakresu szkoły średniej. Podana teoria, w większości uzupełniona przykładami, wprowadzana jest w sposób możliwie najmniej formalny, z wyjątkowym używaniem symboli spoza wiedzy potocznej. Definicje, własności i twierdzenia nie stanowią nowatorskiego ujęcia. Celem bowiem jest jedynie zebranie w jedną całość tych elementów matematyki, które stanowią treść wykładu dla studentów, dla których matematyka jest przedmiotem pomocniczym i przedstawienie go w sposób najbardziej przystępny. Użyte w materiale fotografie i informacje o matematykach pochodzą z bazy biograficznej matematyków zamieszczonej na stronie szkockiego uniwersytetu St Andrews: *http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html*. Wykresy funkcji w większości wykonane zostały przy pomocy ogólnie dostępnego bezpłatnego programu GraphCalc (*http://www.graphcalc.com/download.shtml*). Zachęcam przesyłanie komentarzy dotyczących przedstawionego materiału, w tym również ze wskazaniem nieścisłości oraz błędów, na adres jhauke@amu.edu.pl.

## Spis treści

# ROZDZIAŁ I

# LICZBY OGÓLNIE

## 1.1. TO CO ZNANE ZE SZKOŁY ŚREDNIEJ

W czasie kolejnych kroków naszej edukacji matematycznej zapoznajemy się kolejno z liczbami naturalnymi, całkowitymi, a następnie z ułamkami liczb całkowitych, czyli liczbami wymiernymi, których dalszym rozszerzeniem są liczby rzeczywiste.

### Liczby wymierne

Są to liczby, które można zapisać w postaci stosunku dwóch liczb całkowitych. Zatem to te liczby rzeczywiste, które mają skończone bądź (od pewnego miejsca) okresowe rozwinięcia dziesiętne.

### Liczby rzeczywiste

To takie liczby, których używamy do przedstawienia wartości ciągłych (w tym zera i liczb ujemnych). Klasycznym modelem zbioru liczb rzeczywistych jest linia prosta. Zbiór liczb rzeczywistych oznaczany jest symbolem $\boldsymbol{R}$. Pojęcie liczby rzeczywistej obejmuje wszystkie rodzaje liczb używane w codziennej praktyce – liczby naturalne, całkowite, ułamki, liczby ujemne, pierwiastki...

### Liczby niewymierne

To te liczby rzeczywiste, które nie są liczbami wymiernymi. Oznacza to, że liczby niewymiernej **nie można** zapisać w postaci ilorazu dwu liczb całkowitych. Rozwinięcie dziesiętne liczby niewymiernej jest nieskończone i nieokresowe, np. $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ Pierwiastek arytmetyczny drugiego stopnia z liczby naturalnej jest liczbą wymierną wtedy i tylko wtedy, gdy liczba ta jest kwadratem liczby naturalnej.

## Liczba przestępna

Inaczej jest to liczba niebędąca liczbą algebraiczną. Zatem jest to taka liczba rzeczywista, która nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych:

$$\boldsymbol{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0}$$

Przykładami liczb przestępnych są szczególne liczby niewymierne, takie jak: znane nam stałe matematyczne $\boldsymbol{\pi}$ oraz liczba $\boldsymbol{e}$ *(której opis znajduje się poniżej).*

## 1.2. WPROWADZAMY LICZBĘ $\boldsymbol{e}$

Liczba $e$ została wprowadzona do matematyki niejako kuchennymi schodami, czyli w sposób nie bezpośredni. Aby pokonać trudności obliczeniowe z działaniami na dużych liczbach (np. mnożenie), w czasach gdy nie dysponowano jeszcze żadnymi, nawet najprostszymi maszynami do obliczeń, próbowano zastosować bardzo logiczną metodę przeskalowania by działania te wykonywać na mniejszych liczbach a po wykonaniu działań wrócić do skali oryginalnej. W 1614 r. John Napier przedstawił pracę o logarytmach (to jest właśnie przeskalowanie-zmniejszenie), które pośrednio odwoływały się do dziwnej i nieznanej wówczas podstawy, później rozpoznanej jako odwrotność liczby $e$ (oznaczenie e wprowadził w 1736 r. szwajcarski matematyk Leonhard Euler)., której przybliżenie Euler podał z 18 miejscami po przecinku: $e = 2{,}718281828459045235$.

John Napier (Neper) (1550-1617)


Leonard Euler (1707-1783) na szwajcarskim banknocie 10-cio frankowym

Euler pokazał, że

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \text{ oraz } e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

gdzie $\boldsymbol{n}!$ jest silnią liczby $\boldsymbol{n}$ ($n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n$)

**W oparciu o liczbę został wprowadzony logarytm o podstawie *e* zwany logarytmem naturalnym (<u>oznaczany ln *x*</u>).**

## 1.3. LICZBY ZESPOLONE

To takie liczby, które są uogólnieniem pojęcia liczb rzeczywistych, zatem można je rozumieć jako pewne rozszerzenie zbioru liczb rzeczywistych. Zbiór liczb zespolonych charakteryzuje się tym, że każdy wielomian o współczynnikach z tego zbioru ma w nim pierwiastki. Własności tej nie ma zbiór liczb rzeczywistych, w którym np. równanie $x^2 = -1$ nie ma rozwiązań.

Podstawę do rozważania liczb zespolonych stworzył matematyk Girolamo Cardano. Nadał on w szczególności obiektowi $\boldsymbol{\sqrt{-1}}$ nazwę jednostki urojonej (oznacza się ją literką $\boldsymbol{i}$ - skrót od angielskiego słowa **imaginary**), nie wierząc w rzeczywiste istnienie takiego obiektu, a jedynie uznając go za pomocniczy element w rachunku mającym w zamierzeniu poprzez przekształcenia doprowadzić do uzyskania pierwiastków równania wielomianowego trzeciego stopnia (tzw. wzory Cardano na pierwiastki równania trzeciego stopnia). Dziś to pojęcie ma fundamentalne znaczenie dla techniki (m.in. elektrotechniki), a znalazło swoje główne zastosowanie po kilkuset latach od wynalezienia.

Każdą liczbę zespoloną można przedstawić w postaci $a + bi$, gdzie $a$ oraz $b$ są liczbami rzeczywistymi, natomiast $\boldsymbol{i}$ obiektem o takiej własności, że $\boldsymbol{i^2 = -1}$. Przy czym $\boldsymbol{i}$ nazywamy **jednostką urojoną**, $a$ **częścią rzeczywistą**, zaś $b$ **częścią urojoną** liczby zespolonej $a + bi$ . Przy tej interpretacji "zwykłe" liczby rzeczywiste utożsamiamy z liczbami zespolonymi o części urojonej równej 0: $a = a + 0i$.
W elektronice i pokrewnych dziedzinach jednostka urojona jest często zapisywana jako $j$, żeby uniknąć pomyłek z wartością chwilową prądu elektrycznego tradycyjnie oznaczaną przez $i$.

Moduł liczby zespolonej (uogólnienie modułu liczby rzeczywistej):

$$|\boldsymbol{z}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}$$

Liczbę zespoloną można przedstawić w kilku postaciach:

- **postać algebraiczna**

  $z = a + bi$

- **postać trygonometryczna**

  $z = |z|(cos\varphi + isin\varphi)$,

  gdzie $cos\varphi = \frac{\mathrm{a}}{\sqrt{a^2+b^2}}$ oraz $sin\varphi = \frac{\mathrm{b}}{\sqrt{a^2+b^2}}$

- **postać wykładnicza**

  $z = |z|e^{\varphi i}$

Przykład: $\boldsymbol{z = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}}$

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie liczb zespolonych wykonuje się tak samo jak odpowiednie operacje na wyrażeniach algebraicznych. Należy jedynie pamiętać o własności $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

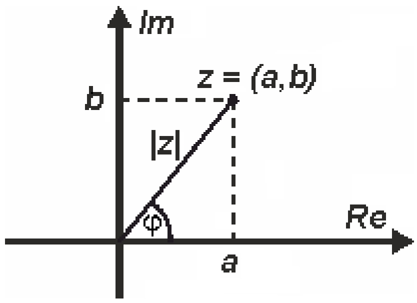
- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d) \cdot i$
- $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d) \cdot i$
- $(a + bi) \cdot (c + di) = ac + (bc + ad) \cdot i + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad) \cdot i$

Dzielenie liczb zespolonych:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

W tej konstrukcji zbiór liczb rzeczywistych utożsamiamy ze zbiorem wszystkich par postaci $< a, 0 >$.

Interpretacja geometryczna:




$\boldsymbol{Re}$ oznacza tu wartości części rzeczywistej, a $\boldsymbol{Im}$ – wartości części zespolonej.

Z interpretacji geometrycznej wywodzi się wspomniana wyżej trygonometryczna reprezentacja liczby zespolonej $a + bi$ za pomocą **modułu** i **argumentu**.

**Moduł** liczby zespolonej (inaczej **wartość bezwzględna**) jest to długość wektora reprezentującego daną liczbę, zaś **argument** to kąt między osią $X$ a danym wektorem mierzony przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Dla liczb rzeczywistych **argument główny** jest równy 0 (liczby dodatnie) lub **π** (liczby ujemne). Argument liczby 0 nie jest określony.

Jeżeli:

$$z_1 = |z_1|(cos\varphi_1 + isin\varphi_1) \text{ oraz } z_2 = |z_2|(cos\varphi_2 + isin\varphi_2), \text{ to}$$

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

gdzie $z_2 \neq 0$, a $\varphi_1$ i $\varphi_2$ są argumentami liczb $z_1$ i $z_2$. Dzięki temu mnożenie przez $\boldsymbol{i}$ można zinterpretować jako obrót płaszczyzny o kąt 90° w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Bezpośrednio stąd wynika też poniższa równość, zwana **wzorem de Moivre'a:**

$$(cos\ \varphi + isin\ \varphi)^n = cos(n\varphi)\ +\ isin(n\varphi).$$

Każda liczba zespolona $z \neq 0$ posiada $n$ różnych pierwiastków $n$-tego stopnia:

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}(cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + isin\frac{\varphi + 2k\pi}{n})$$

gdzie $k = 0,1 \dots n - 1$ oraz $\varphi = arg(z)$

Liczb zespolonych nie można porównywać, czyli określać, która z nich jest większa lub mniejsza. Można natomiast porównywać moduły i kąty (argumenty) dwóch liczb zespolonych, gdyż zarówno moduł jak i kąt są liczbami rzeczywistymi. Dwie liczby zespolone $z_1 = a_1 + ib_1$ i $z_2 = a_2 + ib_2$ są równe, jeżeli:

- ich moduły są równe i argumenty są równe

lub

- ich części rzeczywiste są równe i ich części urojone są równe, czyli $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$.

Obydwa warunki są równoważne.
Sprzężenie do liczby $z = a + bi$ to liczba $\bar{z} = a - bi$. Iloczyn: $z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$.

Każdy wielomian stopnia $k$ (przy założeniu, że bierzemy pod uwagę liczby zespolone) ma tyle pierwiastków, jaki jest jego stopień, stąd potrzeba liczenia $k$ pierwiastków.

# ROZDZIAŁ II

# FUNKCJE

## 2.1. TO CO ZNANE ZE SZKOŁY ŚREDNIEJ

W życiu spotykamy się z wielkościami zmiennymi, które są od siebie uzależnione w tym sensie, że zmiana jednej z nich powoduje określoną zmianę drugiej.
Jeżeli każdej liczbie $x$ ze zbioru liczbowego $\boldsymbol{D}$ przyporządkowana jest dokładnie jedna liczba $y$, to mówimy, że w zbiorze $\boldsymbol{D}$ określona jest pewna funkcja i piszemy

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

*x* - zmienna niezależna

*y* - zmienna zależna

*f(...)* - symbol przyporządkowania

***D*** - dziedzina funkcji

Wartość liczbową zmiennej $y$, która zależy od przyjętej wartości liczbowej zmiennej $x$, nazywamy też **wartością funkcji.**

Funkcja jest określona, gdy wskazany jest sposób przyporządkowania wartościom zmiennej niezależnej $\boldsymbol{x}$ wartości zmiennej zależnej $\boldsymbol{y}$. Przyporządkowanie to może być wskazane na różne sposoby: wzorem, wzorami, słowami, tablicą, rysunkiem.
Funkcję można interpretować za pomocą obrazu graficznego.

Z definicji funkcji wynika, że może ona mieć te samą wartość dla różnych argumentów $x$. Jeśli jednak dla różnych argumentów funkcja przyjmuje różne wartości, tzn. dla każdych $\boldsymbol{x_1}$ i $\boldsymbol{x_2}$ należących do dziedziny funkcji $\boldsymbol{f}$ zachodzi $f(x_1) \neq f(x_2)$, to taką funkcję nazywamy różnowartościową. Dla funkcji różnowartościowej można rozważać funkcję do niej odwrotną. Jest to funkcja $y = f^{-1}(x)$ taka, że jeśli $a = f(b)$, to $f^{-1}(a) = b$ dla każdych $b$ należących do dziedziny funkcji $f$, czyli takie przyporządkowanie, które działa zgodnie z regułą – w zależności $y = f(x)$ ustalamy $y$ i pytamy o $x$. Dziedzina funkcji odwrotnej $f^{-1}(x)$ jest równa zbiorowi wartości funkcji $f(x)$.

Funkcję odwrotną można też określać na takim podzbiorze dziedziny funkcji, na którym ta funkcja jest różnowartościowa. Graficznie funkcja odwrotna ma wykres symetryczny względem prostej $y = x$.

Początek układu $OXY$, czyli punkt $O$, ma współrzędne $(0,0)$.

Każdy punkt płaszczyzny, na której wprowadzono układ współrzędnych $OXY$, ma dokładnie jedną parę współrzędnych. Na odwrót: każdej parze współrzędnych $(x, y)$ odpowiada dokładnie jeden punkt płaszczyzny.

Aby sporządzić wykres (w sposób zgrubny – przybliżony) funkcji $y = f(x)$: układamy tablicę z parami - wartość argumentu $x$ i odpowiadająca jej wartość funkcji $y$, rysujemy układ współrzędnych, zaznaczamy punkty i łączymy je uzyskując wykres funkcji. Wykres funkcji $y = f(x)$ jest zbiorem wszystkich punktów o odciętej $x$ i rzędnej $f(x)$, gdy $x$ przybiera wszystkie wartości z dziedziny $\boldsymbol{D}$ wykreślanej funkcji.

## Własności funkcji

a) Miejsce zerowe funkcji jest to taka wartość argumentu $x$, dla którego wartość funkcji jest równa zero.
b) Funkcje $f$ nazywamy okresową, gdy istnieje taka liczba $T \neq 0$ że dla każdej wartości $x$ z dziedziny funkcji $f$ wartość $x + T$ także należy do jej dziedziny, oraz $f(x + T) = f(x)$.
c) Funkcję $f$ nazywamy parzystą, gdy dla każdej liczby $x$ z dziedziny funkcji $f$ liczba przeciwna $-x$ także należy do tej dziedziny, oraz $f(-x) = f(x)$.
d) Funkcję $f$ nazywamy nieparzystą, gdy dla każdej liczby $x$ z dziedziny funkcji $f$ liczba przeciwna $-x$ także należy do tej dziedziny oraz $f(x) = -f(x)$.
**Funkcja może być parzysta, nieparzysta lub nie mieć żadnej z tych własności**.
e) Funkcję $f$ nazywamy monotoniczną, gdy dla każdej liczby $x$ z dziedziny funkcji $f$ jest rosnącą (dla każdych argumentów $x_1$ i $x_2$ takich, że $x_1 > x_2$ dla odpowiadających im wartości funkcji zachodzi $f(x_1) > f(x_2)$) lub malejącą (dla każdych argumentów $x_1$ i $x_2$ takich, że $x_1 > x_2$ dla odpowiadających im wartości funkcji zachodzi $f(x_1) < f(x_2)$). Funkcja może nie być monotoniczna dla wszystkich argumentów z dziedziny, ale może być monotoniczna dla argumentów należących do pewnego podzbioru dziedziny.
f) Funkcję $f$ nazywamy wypukłą (**wklęsłą**) w przedziale $[a, b]$, gdy dla każdej liczby $x \in [a, b]$ wykres funkcji $f$ leży powyżej (**poniżej**) stycznej poprowadzonej do wykresu tej funkcji.

Istotnym pojęciem w rozważaniach dotyczących funkcji jest pojęcie granicy. W znaczeniu intuicyjnym granicą funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0$ jest taka liczba $g$, do której zbliżają się wartości funkcji jeśli argumenty zbliżają się do $x_0$, co zapisujemy w postaci:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$$

Można też rozważać granicę lewostronną – przy zbliżaniu się po $x$ do $x_0$ z lewej strony i odpowiednio prawostronną, co zapisywane jest w postaci:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = g$$

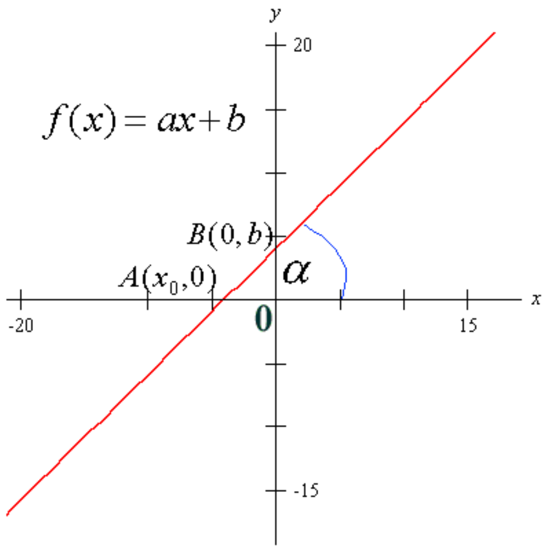
Granica funkcji $f(x)$w punkcie $x_0$ istnieje tylko wtedy gdy granice lewostronna i prawostronna są sobie równe. W szczególności można rozważać granice funkcji w $\infty$ oraz $-\infty$ (o ile funkcja jest tam określona).

## Funkcja liniowa

Funkcję określoną wzorem $y = ax + b$ gdzie $a$ i $b$ są to liczby dane (parametry), $x$ jest zmienną niezależną , a $y$ - zmienną zależną, nazywamy funkcją liniową.

Jeżeli $a \neq 0$ to wzór przedstawia wielomian pierwszego stopnia.

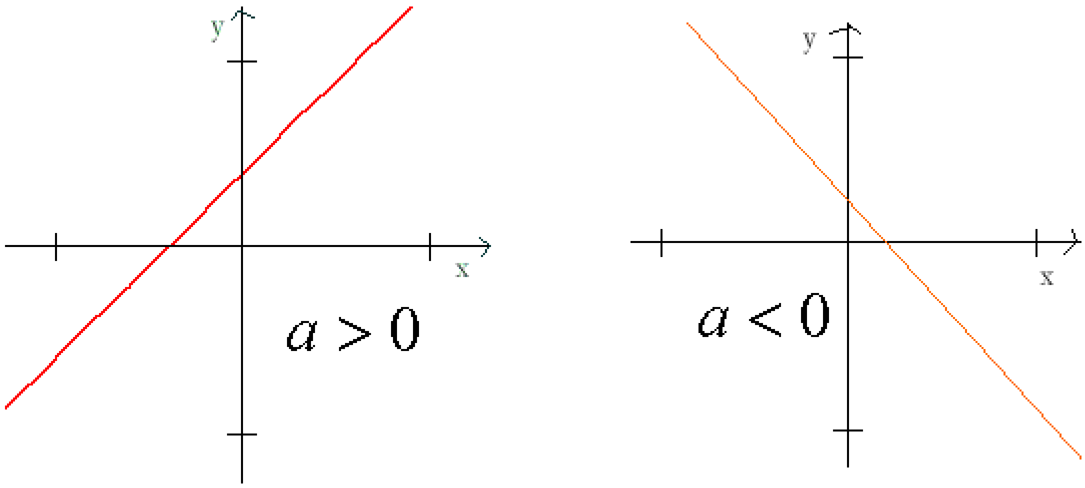
Wykres funkcji liniowej:




Dziedziną funkcji $\boldsymbol{D}$ jest zbiór liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$ a wykresem jest linia prosta. Wystarczy znać tylko dwa punkty wykresu aby go narysować. Współczynnik $\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a = tg\alpha}$) jest **współczynnikiem kierunkowym** - decyduje o kierunku prostej. Liczba $\boldsymbol{b}$, będąca wyrazem wolnym dwumianu $\boldsymbol{ax + b}$, jest rzędną punktu, w którym wykres funkcji liniowej przecina oś rzędnych, a $\boldsymbol{x_0 = \frac{-b}{a}}$ jest miejscem zerowym tej funkcji

Jeżeli $b = 0$ to wykres funkcji przechodzi przez początek układu współrzędnych. Funkcja liniowa ma wtedy postać $y = ax$

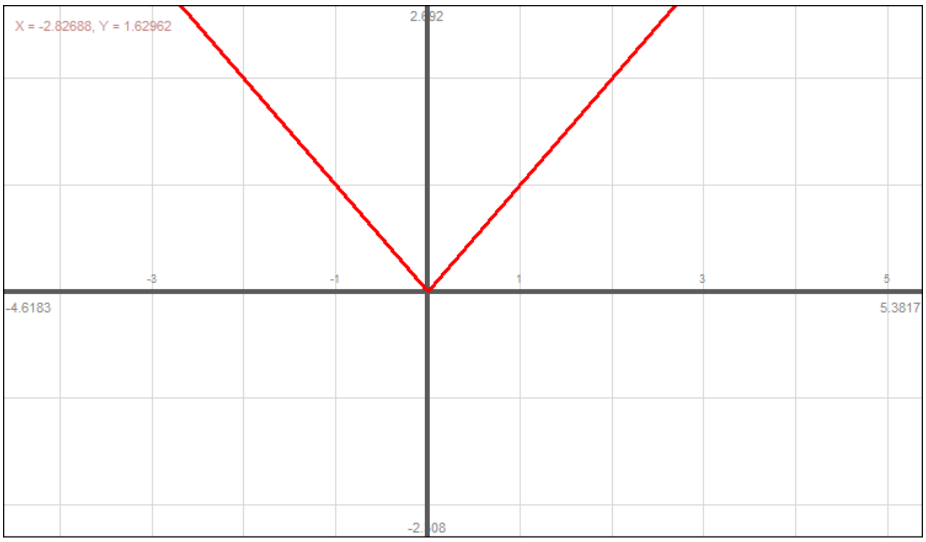
Wykresy funkcji liniowej w zależności od współczynnika kierunkowego $a$.




<u>Zależność liniowa opisana prostą oznacza zmiany proporcjonalne - przyrost wartości funkcji $\Delta y$ jest taki sam dla ustalonego przyrostu argumentu $\Delta x$ niezależnie od wartości $x$ i dla $\Delta x = 1$ wynosi $\Delta x = a$.</u> Dla $a = 0$ funkcja jest więc stała.

## Wartość bezwzględna (moduł)

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x \; dla \; x < 0 \\ x \; dla \; x \geq 0 \end{cases}$$



# Funkcja kwadratowa

Funkcję

$$y = ax^2 + bx + c$$

gdzie $a \neq 0$, $b$ i $c$ są to liczby dane, $x$ jest zmienną niezależną, $y$ jest zmienną zależną, nazywamy funkcją drugiego stopnia lub funkcją kwadratową. Jej dziedzina $\boldsymbol{D = R}$.

Funkcję kwadratową zawsze możemy sprowadzić do postaci kanonicznej:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}\right].$$

Symbol $\Delta$ oznacza deltę, zwaną inaczej wyróżnikiem trójmianu kwadratowego. Chcąc obliczyć deltę korzystamy ze wzoru:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. Osią symetrii tej paraboli jest prosta równoległa do osi $OY$ i przechodząca przez punkt zwany wierzchołkiem paraboli. Wierzchołek paraboli ma współrzędne:

$$x = -\frac{b}{2a}, y = -\frac{\Delta}{4a}$$

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej zależy od delty. Aby je obliczyć, należy rozwiązać równanie: $ax^2 + bx + c = 0$, zwane równaniem kwadratowym.

**A.** gdy $\Delta > 0$, wtedy równanie ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Inaczej mówiąc funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe, czyli wykres funkcji, to znaczy parabola, przecina oś $OX$ w punktach $x_1, x_2$.
$x_1, x_2$ związane są ze sobą tak zwanymi wzorami Viete'a:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ oraz } x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x$$

**B.** gdy $\Delta = 0$, wtedy równanie ma jedno podwójne rozwiązanie (jeden podwójny pierwiastek):

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

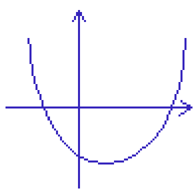
Oznacza to, że funkcja kwadratowa ma jedno miejsce zerowe. Parabola jest w tym punkcie styczna do osi $OX$.

**C.** gdy $\Delta < 0$, wtedy równanie nie ma rozwiązań. W zbiorze liczb rzeczywistych nie istnieje bowiem pierwiastek z liczby ujemnej. Inaczej mówiąc funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych. Parabola nie przecina zatem osi $OX$ w żadnym z punktów.

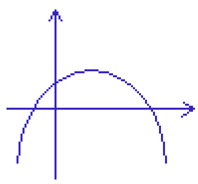
Kształt paraboli zależy nie tylko od delty, ale również od jednego ze współczynników liczbowych, a mianowicie od $a$. Jeżeli $a$ jest mniejsze od zera (jest ujemne), wtedy gałęzie paraboli skierowane są w dół. Jeżeli natomiast $a$ jest liczbą, dodatnią wtedy gałęzie paraboli idą w górę.

Przykładowe wykresy tej funkcji w zależności od wartości $\Delta$ i $a$ :

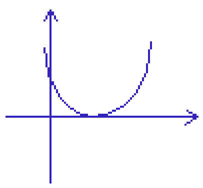
1. $\Delta > 0$ i $a > 0$



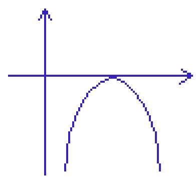
2. $\Delta > 0$ i $a < 0$



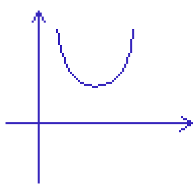
3. $\Delta = 0$ i $a > 0$



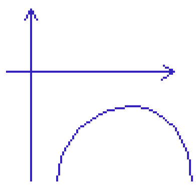
4. $\Delta = 0$ i $a < 0$



5. $\Delta < 0$ i $a > 0$



6. $\Delta < 0$ i $a < 0$



Funkcja $y = ax^2$ jest szczególnym przypadkiem funkcji kwadratowej. Jeżeli $a > 0$, to dla $x = 0$ funkcja $y = ax^2$ przyjmuje wartość najmniejszą równą zeru, a jeżeli $a < 0$, to dla $x = 0$ funkcja ta przyjmuje wartość największą równą zeru.

Funkcja $y = ax^2 + c$ jest szczególnym przypadkiem funkcji kwadratowej. Wykres jej można otrzymać z wykresu funkcji $y = ax^2$, dodając do rzędnych punktów liczbę $c$.

## Wielomiany

Funkcja jednej zmiennej $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ nazywana jest wielomianem stopnia $n$ ze względu na x. Liczby $a_n$, $a_{n-1}$, ..., $a_1$ nazywamy współczynnikami wielomianu. Liczbę $a_0$ nazywamy wyrazem wolnym. Jednomiany $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \cdots, a_1 x, a_0$ nazywamy wyrazami wielomianu. Wielomiany oznaczamy używając symboli $W(x)$, $A(x)$, $B(x)$ itp..

Jeżeli wielomian $W(x)$ przyjmuje dla pewnej wartości zmiennej $x = x_0$ wartość 0, a więc $W(x_0) = 0$, to liczbę $x_0$ nazywamy pierwiastkiem albo miejscem zerowym tego wielomianu.

Mając dwa dane wielomiany $A(x)$ i $B(x)$ możemy utworzyć ich sumę $A(x) + B(x)$ dodając wszystkie wyrazy tych wielomianów. Suma wielomianów jest wielomianem, którego stopień jest nie większy od najwyższego ze stopni dodawanych wielomianów. Stopień sumy wielomianów może być mniejszy od każdego ze stopni dodawanych wielomianów.

Od wielomianu $A(x)$ można zawsze odjąć wielomian $B(x)$. W tym celu należy do wielomianu $A(x)$ będącego odjemną dodać wielomian powstały z wielomianu $B(x)$ przez zmianę znaków wszystkich jego współczynników i wyrazu wolnego.

Można utworzyć iloczyn wielomianów mnożąc każdy wyraz jednego z nich przez każdy wyraz drugiego, a następnie otrzymane iloczyny dodając.

Jeżeli wielomian $W(x)$ różny od stałej 0 jest iloczynem dwóch wielomianów: $A(x)$ i $B(x)$ a więc $W(x) = A(x) \cdot B(x)$ to mówimy, że wielomian $A(x)$ jest podzielnikiem wielomianu $W(x)$ przy czym $B(x)$ jest ich ilorazem $\frac{\boldsymbol{W(x)}}{\boldsymbol{A(x)}} = \boldsymbol{B(x)}$. Możemy też powiedzieć, że $B(x)$ jest podzielnikiem wielomianu $W(x)$, natomiast $A(x)$ jest ilorazem i napisać $\frac{\boldsymbol{W(x)}}{\boldsymbol{B(x)}} = \boldsymbol{A(x)}$.

<u>Funkcję będącą ilorazem wielomianów nazywa się funkcją wymierną</u>

## Funkcja potęgowa

Funkcja potęgowa ma postać:

$$y = ax^r$$

gdzie: $a$ jest dowolną liczbą rzeczywistą
$x$ jest zmienną (argumentem)
$r$ jest rzeczywistym wykładnikiem potęgi.

Dziedzina funkcji zależy od $r$:

a. gdy $r$ jest dodatnią liczbą całkowitą lub zerem, wtedy dziedziną funkcji potęgowej są wszystkie liczby rzeczywiste, inaczej mówiąc:

jeśli $r \in C_+ \cup \{0\}$, to $x \in R$

np. $y = x^4$ - dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych (wiemy, że jakakolwiek liczba podniesiona do potęgi zero jest równa jeden)

b. gdy $r$ jest ujemną liczbą całkowitą, wtedy dziedziną funkcji potęgowej są wszystkie liczby rzeczywiste z wyjątkiem zera: $r \in C_-$ to $x \in R - \{0\}$

np. $y = x^{-2}$- z własności potęg wiemy, że to jest to samo co: $y = \frac{1}{x^2}$. Widzimy zatem, że $x$ musi być różny od zera, ponieważ znajduje się w mianowniku.

c. gdy $r$ jest liczbą rzeczywistą nie należącą do zbioru liczb całkowitych, to dziedzina może (ale nie musi) być ograniczona do zbioru liczb rzeczywistych bez zera lub do zbioru liczb rzeczywistych dodatnich w zależności od wartości $r$,

np. dla $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ , jako że $x$ znajduje się pod pierwiastkiem parzystym, dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych.

Od wykładnika $r$ funkcji potęgowej zależy również monotoniczność funkcji:

a. gdy $r$ jest większe od zera, wtedy funkcja jest rosnąca w przedziale: $(0, +\infty)$
b. gdy $r$ jest mniejsze od zera, wtedy funkcja jest malejąca w przedziale: $(0, +\infty)$
c. gdy wykładnik $r$ jest zerem, wtedy funkcja jest stała i równa jeden w każdym punkcie swej dziedziny.

Warto również zapamiętać, kiedy funkcja jest parzysta, a kiedy nieparzysta. Ale najpierw przypomnimy sobie, co oznaczają te terminy: mówimy, że funkcja jest parzysta, kiedy spełnia warunek: $f(x) = f(-x)$, wtedy wykres takiej funkcji jest symetryczny względem osi $OY$.

Natomiast funkcja jest nieparzysta gdy spełnia warunek: $f(-x) = -f(x)$, jej wykres jest symetryczny względem początku układu współrzędnych (to znaczy punktu $(0,0)$). Trzeba zapamiętać, że funkcja może nie być ani parzysta, ani nieparzysta. Dla funkcji potęgowej:

a. gdy $r$ jest liczbą naturalną, to funkcja potęgowa jest parzysta wtedy, gdy wykładnik $r$ jest parzysty i jest nieparzysta, gdy wykładnik $r$ jest nieparzysty,
b. gdy $r$ jest liczbą całkowitą ujemną, to funkcja jest parzysta, gdy ujemny wykładnik jest parzysty i nieparzysta, gdy ujemny wykładnik jest liczbą nieparzystą.

# Funkcja wykładnicza

Wzór ogólny funkcji wykładniczej przedstawia się następująco:

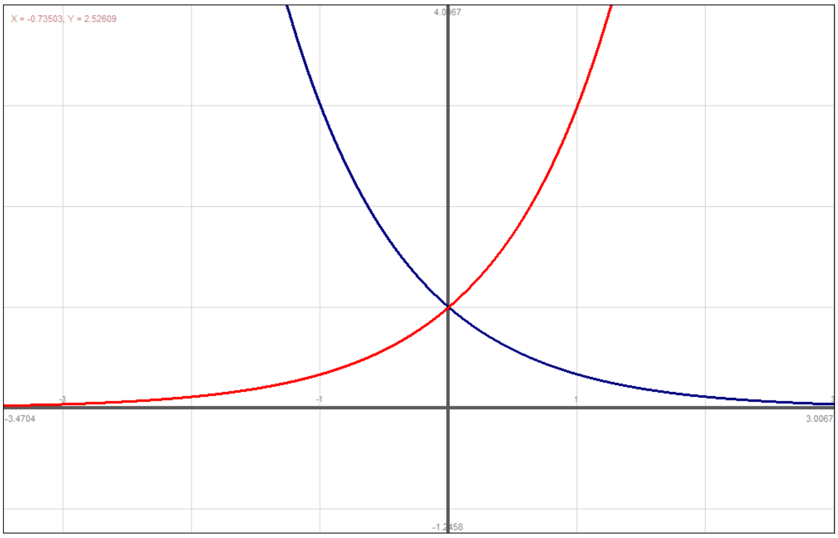
$$y = a^x,$$

gdzie $a$ jest większe od zera. Dziedziną takiej funkcji są wszystkie liczby rzeczywiste. Gdybyśmy chcieli porównać funkcję wykładniczą z funkcją potęgową, najpierw zauważylibyśmy wizualne podobieństwo między nimi. Obydwie te funkcje zapisane są w postaci potęgi. Ale istotną rzeczą, odróżniającą je od siebie, jest fakt, że w funkcji potęgowej zmienna $x$ jest podstawą potęgi, natomiast w funkcji wykładniczej, jak sama nazwa wskazuje, zmienna $x$ jest wykładnikiem potęgi.

A oto kilka własności funkcji:

1) jeżeli $a > 1$, wtedy funkcja wykładnicza jest rosnąca,
2) jeżeli $0 < a < 1$, wtedy funkcja jest malejąca,
3) dla $a = 1$ funkcja jest stała (ponieważ liczba jeden podniesiona do jakiejkolwiek potęgi zawsze da jeden),
4) wykres każdej funkcji wykładniczej przecina oś $Y$ w punkcie $1$.

Pamiętamy, że jeżeli funkcja przecina oś $Y$ w jakimś punkcie, to oznacza to, że współrzędna $x$-owa jest wtedy <u>równa zero</u>. Zatem podnosimy liczbę $a$ do potęgi zero. Wynikiem podnoszenia jakiejkolwiek liczby do potęgi zero jest zawsze jeden (dodajmy, że zero podniesione do potęgi zero to symbol nieokreślony).



Na powyższym rysunku granatowa linia przedstawia wykres funkcji wykładniczej w przypadku, kiedy $a$ należy do przedziału od zera do jedynki, czyli gdy funkcja jest malejąca. Natomiast czerwona linia przedstawia wykres funkcji wykładniczej rosnącej.

## Funkcja logarytmiczna

Ogólny wzór funkcji logarytmicznej ma postać:

$$y = \log_a x$$

$a$ to tak zwana podstawa logarytmu, która musi być większa od zera i różna od jedynki, natomiast $x$ jest liczbą logarytmowaną, z założenia dodatnią czyli

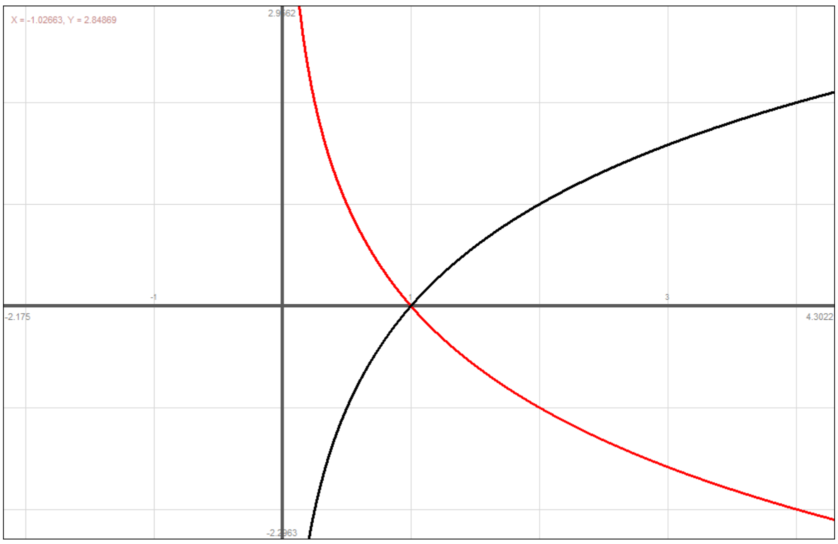
$$a > 0 \text{ i } a \neq 0 \text{ oraz } x > 0$$

Definicja logarytmu mówi, że logarytm jest wykładnikiem potęgi, do której należy podnieść podstawę logarytmu, aby otrzymać liczbę logarytmowaną czyli $x$. Zatem: $y = \log_a x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^y = x$

Z powyższego wzoru wynikają pewne własności, a mianowicie:

$$\log_a a^y = y \text{ oraz } a^{\log_a x} = x$$

Wykres funkcji logarytmicznej zawsze przechodzi przez punkt $(1,0)$, a w punkcie $x = 0$ ma pionową asymptotę. Jeżeli podstawa logarytmu jest większa od jedynki $(a > 0)$, wtedy funkcja jest rosnąca, jeżeli natomiast podstawa należy do przedziału $(0,1)$, to funkcja jest malejąca.



Na powyższym rysunku czerwonym kolorem czerwonym przedstawiono funkcję logarytmiczną malejącą, natomiast czarnym funkcję rosnącą.

Pozostałe własności funkcji logarytmicznej:

1. Logarytm iloczynu równa się sumie logarytmów:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

2. Logarytm ilorazu równa się logarytmowi dzielnej pomniejszonemu o logarytm dzielnika:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

3. Logarytm potęgi równa się iloczynowi wykładnika potęgowanego przez logarytm podstawy potęgowej:

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

Warto również zapamiętać, że: $\log_a 1 = 0$ oraz $\log_a a = 1$. Do rozwiązywania zadań przyda się również wzór na zmianę podstawy logarytmu:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Z powyższego wynika, że dla dowolnych dodatnich i różnych od jedności liczb $a$ i $b$ jest prawdziwa równość:

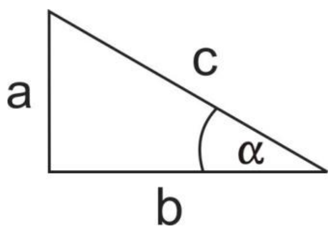
$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

## Funkcje trygonometryczne

Trygonometria oznacza dosłownie „mierzenie trójkątów”. Głównymi pojęciami trygonometrii są funkcje trygonometryczne. Istnieje sześć funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens, cotangens, secans, cosecans (dwie ostatnie pominiemy w naszych rozważaniach).

Funkcje trygonometryczne są stosunkami boków trójkąta prostokątnego. Wartość takiego stosunku zależy od kąta. Funkcje trygonometryczne są powiązane ze sobą wzajemnie licznymi związkami.

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego można określić z trójkąta prostokątnego.




$$\text{sinus:} \quad \sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\text{cosinus:} \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{tangens: } \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

$$cotangens: \; ctg\alpha = \frac{b}{a}$$

**T1. Sinus**

Funkcja $\sin x$ określona jest na przedziale $(-\infty, +\infty)$. Jest funkcją ograniczoną:

$$|sin| \leq 1$$

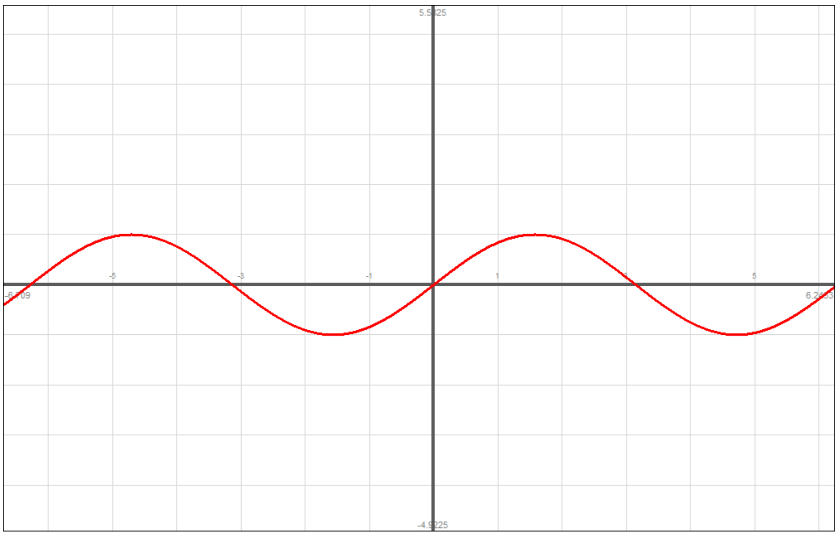
Oznacza to, że wykres funkcji nie przekroczy poziomu $y = 1$ i $y = -1$.

Funkcja sinus jest funkcją nieparzystą:

$$sin(-x) = -sin\, x$$

a więc jej wykres jest symetryczny względem początku układu współrzędnych. Każda z funkcji trygonometrycznych jest funkcją okresową. Podstawowym okresem funkcji sinus jest liczba $2\pi$, czyli: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

Wykresem funkcji sinus jest tak zwana



sinusoida.

**T2. Cosinus**

Funkcja $\cos x$ tak jak sinus jest określona na przedziale $(\infty, +\infty)$ i również jest ograniczona:

$$|\cos x| \leq 1$$

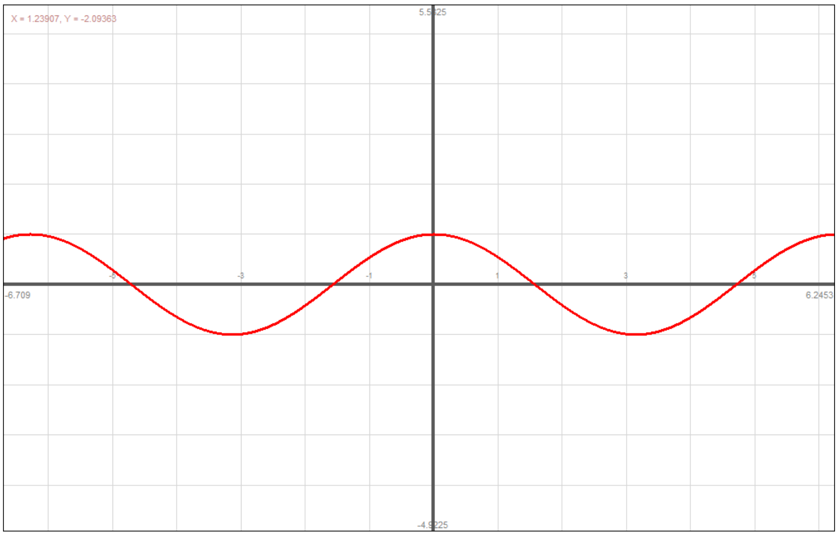
Zatem wykres funkcji cosinus również nie przekroczy punktów $y = 1$ i $y = -1$. Okresem funkcji $\cos x$ jest tak samo liczba $2\,\pi$:

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

Funkcja cosinus jest jednak funkcją parzystą:

$$\cos(-x) = \cos x$$

a jej wykres, tak zwana cosinusoida (czyli sinusoida przesunięta w lewo o odcinek długości $0{,}5\pi$), jest symetryczny względem osi $OY$.



**T3. Tangens**

Funkcja $\operatorname{tg} x$ jest określona na przedziałach:

$$\frac{\pi(2k-1)}{2}, \frac{\pi(2k+1)}{2}$$

gdzie $k$ jest dowolną liczbą całkowitą. Tangens nie jest funkcją ograniczoną. Okresem $\operatorname{tg} x$ jest liczba $\pi$:

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$$

Funkcja tangens jest funkcją nieparzystą:

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$$

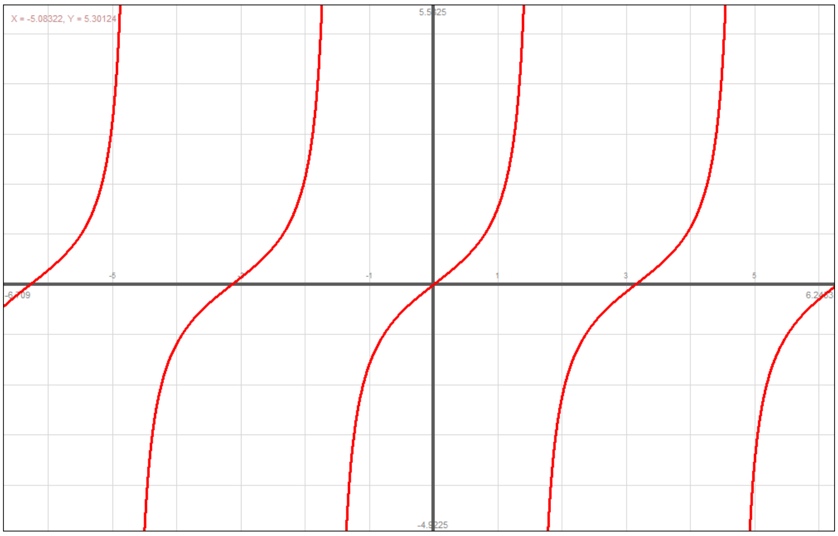
a wiec jej wykres, tak zwana tangensoida, jest symetryczny względem początku układu współrzędnych, czyli punktu $(0{,}0)$. Tangensoida ma asymptoty pionowe o równaniach:

$$x = \left(\mathrm{k} + \frac{1}{2}\right)\pi$$

to znaczy w takich punktach $x$ jak na przykład:

$$\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi$$

nie jest określona, nie ma wartości dla takich argumentów.




**T4.** Cotangens

Funkcja $\operatorname{ctg} x$ jest określona na przedziałach:

$$\left(\pi k, \pi(k+1)\right)$$

Podobnie jak tangens, funkcja $\operatorname{ctg} x$ nie jest ograniczona. Okresem podstawowym jest liczba $\pi$:

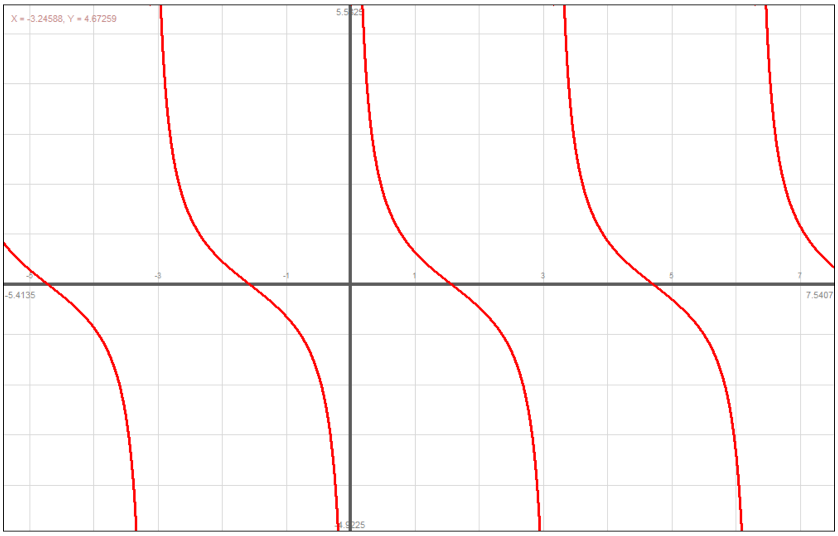
$$\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x$$

Cotangens jest funkcją nieparzystą:

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$$

a jej wykres, tak zwana cotangensoida, jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.

Cotangensoida ma asymptoty pionowe w punktach: $x = k\,\pi$, to znaczy, że w takich punktach jak na przykład: $\pm\pi, \pm 2\pi$ nie jest określona, nie ma wartości dla tych argumentów.



Podstawowe związki zachodzące pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi:

$$\boldsymbol{sin^2 x + cos^2 x = 1}\ \textbf{(wzór jedynkowy)}$$

$$\mathbf{tg}\, \boldsymbol{x = \frac{sin\ x}{cos\ x}}$$

$$\mathbf{ctg}\, \boldsymbol{x = \frac{cos\ x}{sin\ x}}$$

$$\mathbf{tg}\, \boldsymbol{x = \frac{1}{ctg\ x}}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych dla dowolnego kąta odnajduje się według następujących zasad:

**Z1.** Jeżeli kąt jest większy od $360°$, to funkcję sprowadzamy do funkcji kąta pomiędzy $0°$ a $360°$ (natomiast tangens i cotangens do kąta pomiędzy $0°$ a $180°$) według następujących wzorów:

$$\sin(n360° + \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(n360° + \alpha) = \cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}(n180° + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\mathrm{ctg}(n180° + \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$$

gdzie $n$ jest dowolną liczbą całkowitą.

**Z2.**. Jeżeli kąt jest ujemny, to funkcję sprowadzamy do funkcji kąta dodatniego według wzorów:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

**Z3**. Jeżeli kąt jest z przedziału pomiędzy $90°$ a $360°$, to sprowadzamy do funkcji kąta ostrego według tak zwanych wzorów redukcyjnych:

| **Funkcja** | $\beta = 90° \pm \alpha$ | $\beta = 180° \pm \alpha$ | $\beta = 270° \pm \alpha$ | $\beta = 360° \pm \alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin\beta$ | $+\cos\alpha$ | $\pm\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ |
| $\cos\beta$ | $\pm\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\pm\sin\alpha$ | $+\cos\alpha$ |
| $\operatorname{tg}\beta$ | $\pm\operatorname{ctg}\alpha$ | $\pm\operatorname{tg}\alpha$ | $\pm\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ |
| $\operatorname{ctg}\beta$ | $\pm\operatorname{tg}\alpha$ | $\pm\operatorname{ctg}\alpha$ | $\pm\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ |

Zasada jest taka: jak mamy $90°$, albo $270°$ (jednym słowem nieparzyste wielokrotności $90°$) to wtedy funkcja przechodzi na tak zwaną kofunkcję, przykładowo: $\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$

Kofunkcją dla sinusa jest cosinus, dla cosinusa - sinus, dla tangensa - cotangens, dla cotangensa - tangens. Znak natomiast zależy od tego, w której ćwiartce kąt się znajduje. Są cztery ćwiartki, które numerowane są przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Pierwsza ćwiartka to kąty o wartościach od $0°$ do $90°$, druga od $90°$ do $180°$, trzecia od $180°$ do $270°$, natomiast czwarta od $270°$ do $360°$. Warto zapamiętać taki wierszyk:

W pierwszej (w domyśle ćwiartce) wszystkie są dodatnie w drugiej tylko sinus. W trzeciej tangens i cotangens, a w czwartej cosinus.

**Z4.** Jeżeli kąt jest z przedziału od $0°$ do $90°$ to jego wartości odczytujemy z tablic (lub korzystamy z arkusza kalkulacyjnego).

Wzory **Z2** są wzorami redukcyjnymi. W matematyce są również tak zwane tożsamości trygonometryczne:

**(t1)** funkcje trygonometryczne sumy i różnicy dwóch zmiennych:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$
$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\beta}$$
$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta-1}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta}$$
$$\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta+1}{\mathrm{ctg}\,\beta-\mathrm{ctg}\,\alpha}$$

**(t2)** funkcje trygonometryczne podwojonego argumentu:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$$
$$\mathrm{ctg}\,2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\,\alpha-1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$$

**(t3)** sumy i różnice funkcji trygonometrycznych:

$$sin\,\alpha+sin\,\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2sin\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$tg\,\alpha+tg\,\beta=\frac{sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$tg\,\alpha-tg\,\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$ctg\,\alpha+ctg\,\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$ctg\ \alpha - ctg\ \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}$$

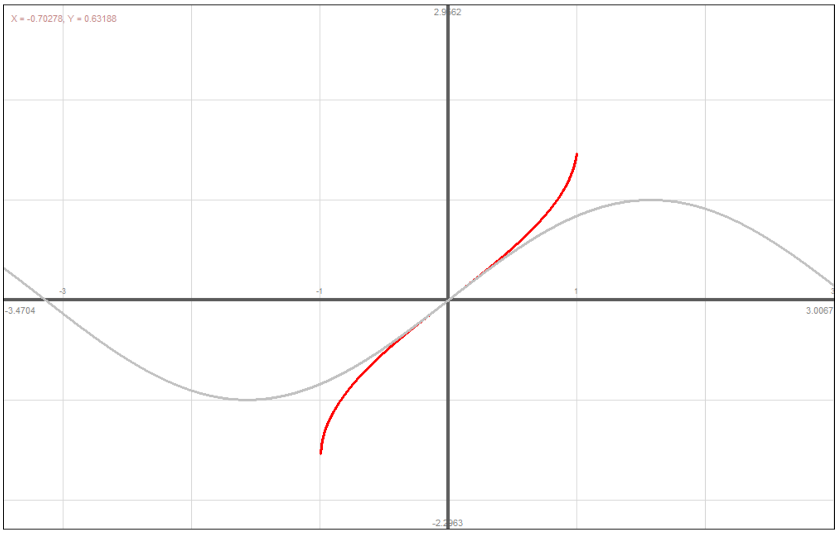
## 2.2. FUNKCJE CYKLOMETRYCZNE

Funkcje cyklometryczne to funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych ( zwane też funkcjami kołowymi) przy takim ograniczeniu dziedzin tych funkcji, aby były one różnowartościowe

$y = arc\sin x$ (odwrotna do funkcji $y = \sin x$ dla $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$).

Jest określona na przedziale $-1 \leq x \leq 1$ i przyjmuje wartości $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

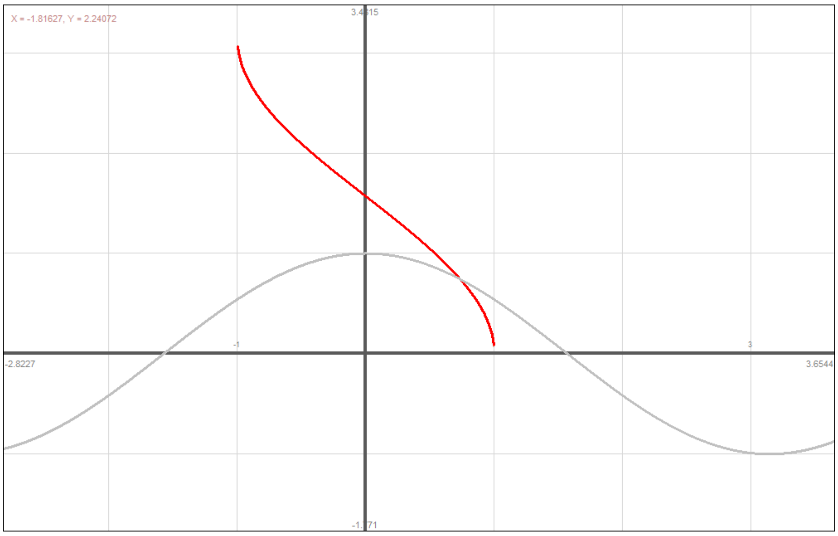
(na wykresie poniżej zaznaczona kolorem czerwonym).




$y = arc\cos x$ (odwrotna do funkcji $y = \cos x$ dla $0 \leq x \leq \pi$).

Jest określona na przedziale $-1 \leq x \leq 1$ i przyjmuje wartości $0 \leq y \leq \pi$

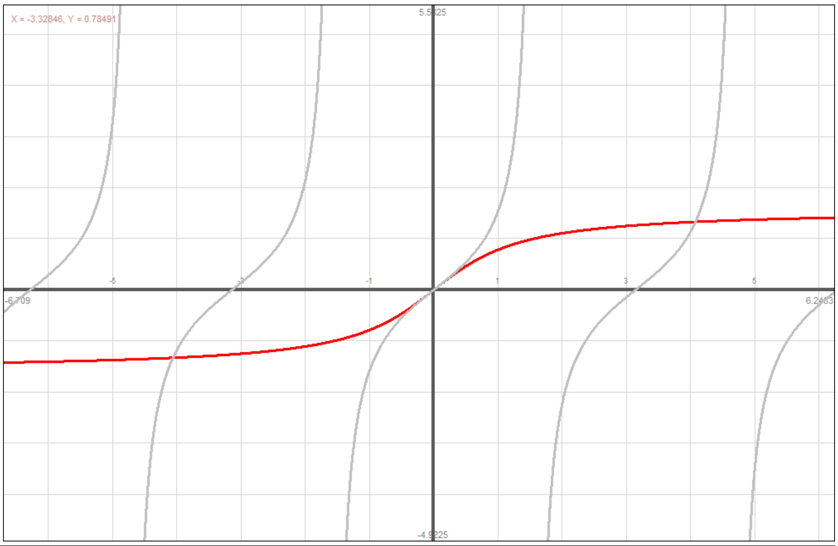
(na wykresie poniżej zaznaczona kolorem czerwonym).



$y = arc\,\mathrm{tg}\,x$ (odwrotna do funkcji $y = \mathrm{tg}\,x$ dla $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$).

Jest określona na przedziale $-\infty \leq x \leq \infty$ i przyjmuje wartości $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

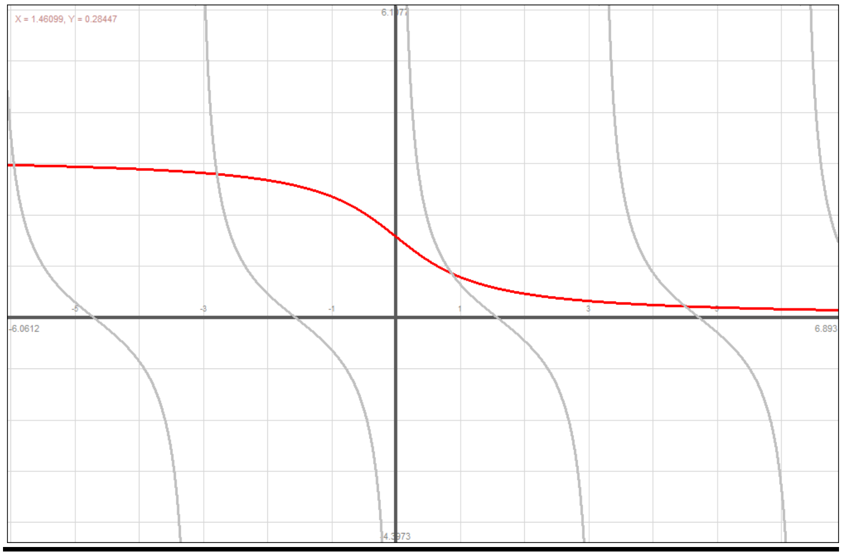
(na wykresie poniżej zaznaczona kolorem czerwonym).



$y = arc\,\mathrm{tg}\,x$ (odwrotna do funkcji $y = \mathrm{ctg}\,x$ dla $\langle \mathbf{0} < x < \pi)$.

Jest określona na przedziale $-\infty \leq x \leq \infty$ i przyjmuje wartości $\mathbf{0} < y < \pi$

(na wykresie poniżej zaznaczona kolorem czerwonym).


X = 1.46099, Y = 0.28447
-5
-3
-1
1
3
-6.0612
6.893

# ROZDZIAŁ III

# POCHODNE

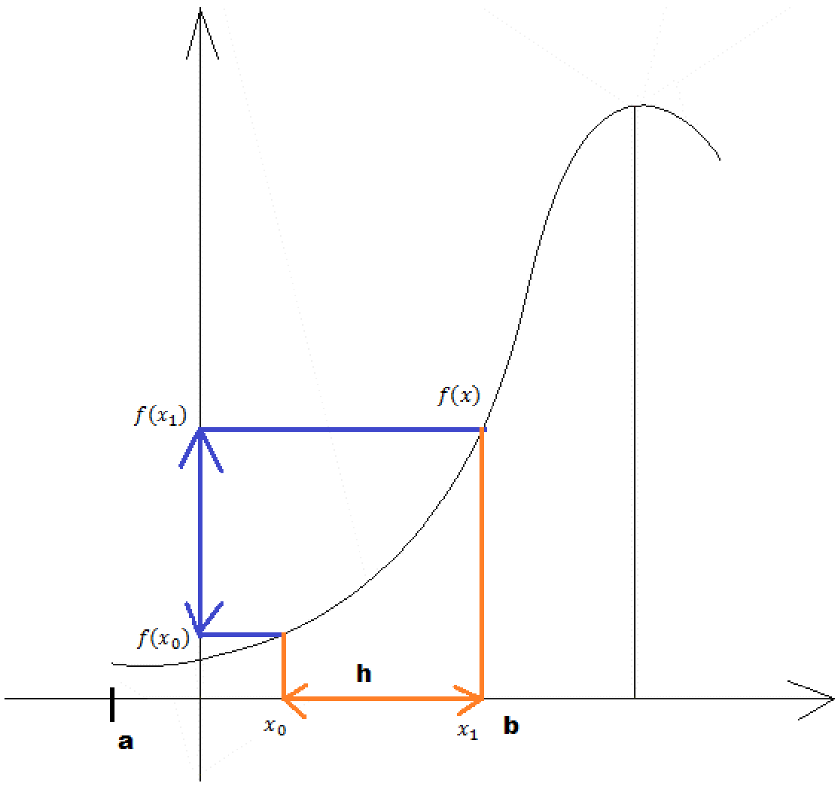
## 3.1. DEFINICJA POCHODNEJ

### Iloraz różnicowy

Jeżeli funkcja $\boldsymbol{f}$ jest określona w przedziale $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ oraz $\boldsymbol{x_0}$ i $\boldsymbol{x_1}$ należą do tego przedziału, przy czym $\boldsymbol{x_0} \neq \boldsymbol{x_1}$ to różnicę $\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_0}$ nazywamy przyrostem oznaczamy $\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}$ argumentu od $\boldsymbol{x_0}$ do $\boldsymbol{x_1}$, a odpowiadającą mu różnicę $\Delta \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})$ przyrostem wartości funkcji $\boldsymbol{f}$ odpowiadającej przyrostowi argumentu.

**Ilorazem różnicowym** funkcji $\boldsymbol{f}$ odpowiadającej przyrostowi argumentu $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_0}$, (przy czym $\boldsymbol{x_0} \neq \boldsymbol{x_1}$ oraz $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_0}$ należą do przedziału $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$) jest iloraz:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



$$h = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = h + x_0$$

Przykład:

$f(x) = 5 - x^2;\ x_0 = 3;\ x_1 = 5$

$f(x_0) = f(3) = 5 - 9 = -4$

$f(x_1) = f(5) = 5 - 25 = -20$

$\Delta y = f(x_1) - f(x_0) = -20 + 4 = -16$

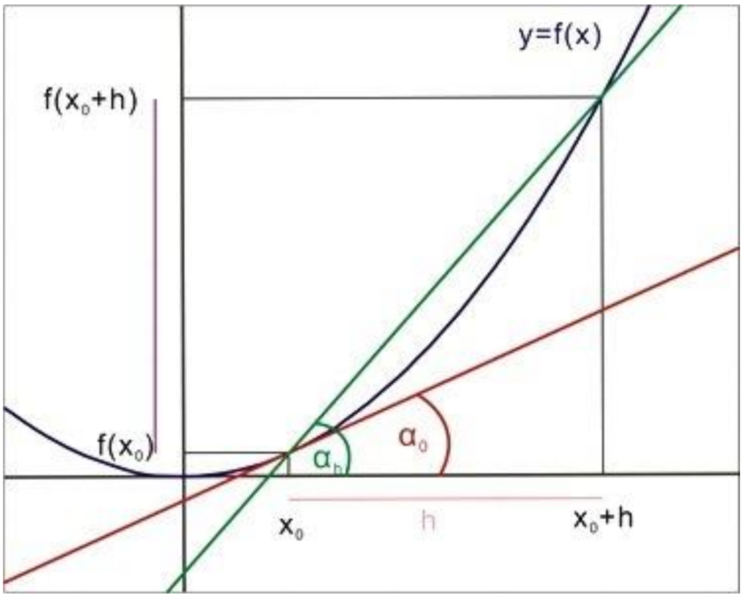
$\Delta x = (x_1) - (x_0) = 5 - 3 = 2$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-16}{2} = -8$

## Pochodna funkcji

Jeżeli $\boldsymbol{f}$ jest określona w przedziale $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ i $\boldsymbol{x_0}$ należy do tego przedziału oraz istnieje skończona granica ilorazu różnicowego przy $\boldsymbol{h}$ dążącym do $\mathbf{0}$, to wtedy tę granicę nazywamy **pochodną funkcji $\boldsymbol{f}$ w punkcie $\boldsymbol{x_0}$** i oznaczamy ją $f'^{(x_0)}$ .

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$




**Przykład:** Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 3$.

Liczymy wartość pochodnej w punkcie $x_0$ korzystając z definicji:

$$f^{'}(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(6+h)}{h} = \lim_{h \to 0}(6+h) = 6$$

Możemy również wyliczyć z definicji wzór ogólny pochodnej dla tej funkcji:

$$f^{'}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0}(2x+h) = 2x$$

Czyli: $f^{'}(x) = 2x$ (<u>pochodna jako funkcja zmiennej x</u>)

Korzystając z tak wyliczonego wzoru możemy teraz obliczać wartość pochodnej w dowolnym punkcie, np.:

$f^{'}(2) = 2 \cdot 2 = 4$

$f^{'}(0) = 2 \cdot 0 = 0$

$f^{'}(-5) = 2 \cdot (-5) = -10$

Mówimy, że funkcja $\boldsymbol{f}$ jest **różniczkowalna** w punkcie $\boldsymbol{x_0}$**,** jeżeli ma pochodną w tym punkcie.

**<u>Pochodne jednostronne funkcji:</u>**

Jeżeli iloraz różnicowy ma granicę jednostronną w punkcie $x_0$, to granicę tę nazywamy pochodną jednostronną (prawostronną lub lewostronną) funkcji $f$ w punkcie $x_0$ i oznaczamy odpowiednio symbolami:

$$\mathbf{f'_{+}(x_0) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

$$\mathbf{f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

Pochodna $\boldsymbol{f'(x_0)}$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy obie pochodne jednostronne istnieją i są sobie równe.

## 3.2. WZORY NA POCHODNE

Pochodne funkcji elementarnych:

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}, \qquad (x)' = 1, \qquad (c)' = 0$$

$$(\sin x)' = \cos x\,, \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(e^x)' = e^x$$

Wzory ogólne:

Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są różniczkowalne, to

$$[f(x) + g(x)]' = [f(x)]' + [g(x)]'$$

$$[f(x) - g(x)]' = [f(x)]' - [g(x)]'$$

$$[f(x)g(x)]' = [f(x)]'g(x) + f(x)[g(x)]'$$

$$[cg(x)]' = c[g(x)]'$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{[f(x)]'g(x) - f(x)[g(x)]'}{[g(x)]^2}$$

Twierdzenia:

1) (**pochodna funkcji odwrotnej**) - jeżeli funkcja $x = g(y)$ jest różnowartościowa i ma pochodną $[g(y)]' \neq 0$, to funkcja $y = f(x)$, odwrotna do niej ma pochodną

$$[f(x)]' = \frac{1}{[g(y)]'}$$

2) (**pochodna funkcji złożonej**) – jeżeli funkcje $u = f(x)$ i $y = g(u)$ mają pochodne $[f(x)]'$oraz $[g(u)]'$ to funkcja $F(x) = g\big(f(x)\big)$ ma pochodną $[F(x)]' = [g(u)]'[f(x)]'$.

Pochodne funkcji c.d.:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}\,, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in C$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\,, x \neq k\pi, k \in C$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}\ , x \in R_+$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}\ , x \in R, a \in R_+ - \{1\}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a\ , x \in R, a \in R_+ - \{1\}$$

$$(arc\ \sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , (arc\ \cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(arc\ \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}\ , (arc\ \operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

## 3.3. ZASTOSOWANIA POCHODNEJ

W geometrii, linia styczna (lub po prostu styczna) do krzywej płaszczyźnie w określonym punkcie jest linia prosta, że "po prostu dotyka" krzywej w tym punkcie**.** Geometrycznie rzecz biorąc pochodna $f'(x_0)$ jest równa tangensowi kąta $\alpha_0$, jaki tworzy z osią $\boldsymbol{OX}$ styczną do wykresu funkcji $\boldsymbol{y = f(x)}$ w punkcie o odciętej $\boldsymbol{x_0}$**.** Równanie tej stycznej jest postaci

$$\boldsymbol{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)\ , gdzie\ y_0 = f(x_0)}$$

**Zauważmy, że jeśli pochodną funkcji potraktować jako funkcję to można liczyć dla niej kolejne pochodne(zwane odpowiednio pochodnymi wyższych rzędów)**

np. dla $f(x) = x^4$ kolejne pochodne (pierwszego, drugiego, trzeciego, czwartego i piątego rzędu) to

$$\boldsymbol{f'(x) = 4x^3,\ f''(x) = 12x^2,\ f'''(x) = 24x,\ \ f^{(4)}(x) = 24,\ f^{(5)}(x) = 0\ .}$$

Różne sposoby notacji pierwszej i drugiej pochodnej

$\boldsymbol{y'}$, $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$, $\boldsymbol{\frac{df}{dx}(x)}$, $\boldsymbol{\frac{d}{dx}f(x)}$, $\boldsymbol{\dot{y}}$, , $\boldsymbol{y''}$, $\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2}}$, $\boldsymbol{\frac{d^2f}{dx^2}(x)}$, $\boldsymbol{\frac{d^2}{dx^2}f(x)}$, $\boldsymbol{\ddot{y}}$.

**Pochodna informuje o kierunku i tempie zmian wartości funkcji.**

Jeśli funkcja w jakimś przedziale jest rosnąca, to jej pochodna, dla wartości x zawartych w tym przedziale, będzie większa od zera.
Pochodna ujemna oznacza, że funkcja jest malejąca w danym przedziale. Wynika to z wartości tangensa kąta nachylenia stycznej: dla kąta mniejszego od 90° będzie on dodatni, a dla kątów większych od 90° - ujemny.
Interpretację powyższą można zaobserwować na prezentacji:
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Graph_of_sliding_derivative_line.gif

# Ekstremum lokalne funkcji

**Maksimum lokalne:**

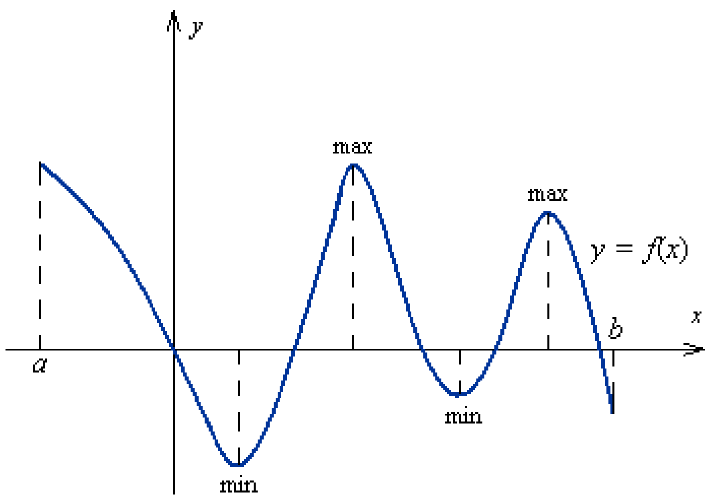
Funkcja $f$ ma w punkcie $x_0 \in D_f$ maksimum lokalne równe $f(x_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie sąsiedztwo $S$ punktu $x_0$, że dla każdego $x \in S \cap D_f$ *i* $x \neq x_0$ jest spełniona nierówność $\boldsymbol{f(x)} < f(\boldsymbol{x_0})$ (*znak* $\cap$ *oznacza część wspólną zbiorów* ).

Maksimum lokalne wyznaczamy korzystając z różniczkowego (opartego o pochodną) kryterium istnienia ekstremum lokalnego funkcji.

**Minimum lokalne:**

Funkcja $f$ ma w punkcie $x_0 \in D_f$ minimum lokalne równe $f(x_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie sąsiedztwo $S$ punktu $x_0$, że dla każdego $x \in S \cap D_f$ *i* $x \neq x_0$ jest spełniona nierówność $\boldsymbol{f(x)} > f(\boldsymbol{x_0})$.

Minimum lokalne wyznaczamy korzystając z różniczkowego kryterium istnienia ekstremum lokalnego funkcji.




**Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji**

Jeżeli funkcja $f$ ma w punkcie $x_0 \in D_f$ ekstremum, to w tym punkcie pochodna $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$ lub pochodna $\boldsymbol{f'(x_0)}$ **nie istnieje**.

**Warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji**

**(zmiana znaku pochodnej w pobliżu $x_0$)**

Jeżeli funkcja $f$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in D_f$ *(czyli w punkcie $x_0$ należącym do dziedziny funkcji $D_f$)* ma pochodną w pewnym sąsiedztwie $S(x_0; \delta)$ (*dla pewnej wartości $\delta$*) przy czym:

***$f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ czyli zmiana znaku pochodnej z dodatniego przed punktem $x_0$ na ujemny za tym punktem***

***[$f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ czyli zmiana znaku pochodnej z ujemnego przed punktem $x_0$ na dodatni za tym punktem]***

to funkcja ma w punkcie $x_0$ **maksimum** (**minimum**) lokalne.

**Inny warunek wystarczający** istnienia ekstremum funkcji - tylko dla funkcji **n-krotnie różniczkowalnych**.

Załóżmy, że funkcja $f$ jest:

-$n$-krotnie różniczkowalna w pewnym sąsiedztwie $S$ punktu $x_0 \in D_f$,

-jej $n$-ta pochodna jest ciągła w punkcie $x_0$ oraz otoczeniu S oraz

-wszystkie pochodne niższych rzędów od $n$ są równe 0 w tym punkcie

$(f^{(k)}(x_0) = 0, k = 1, \dots, n-1)$ a $n$ -ta pochodna jest pierwszą różną od zera w tym punkcie $(f^{(n)}(x_0) \neq 0)$ to :

- jeżeli $n$ jest liczbą nieparzystą to funkcja nie ma ekstremum w punkcie $x_0$,

- jeżeli $n$ jest liczbą parzystą $f^{(n)}(x_0) > 0$ to funkcja ma minimum w punkcie $x_0$

- jeżeli $n$ jest liczbą parzystą $f^{(n)}(x_0) < 0$ to funkcja ma maksimum w punkcie $x_0$.

O ile istnieje to maksimum czy też minimum (lokalne) to wynosi ono $f(x_0)$.

## Ekstremum globalne (absolutne) funkcji

Funkcja $y = f(x)$ ma w punkcie $x_0 \in D_f$ minimum (maksimum) globalne, jeżeli dla każdego $x \in D_f$ spełniona jest nierówność: $f(x) \geq f(x_0)$ $[f(x) \leq f(x_0)]$.

## Asymptoty funkcji

**Asymptota pionowa:**

Niech funkcja $f$ jest określona w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu $x_0$.

Prosta o równaniu $x = x_0$ jest asymptotą lewostronną wykresu funkcji $f$, jeśli

$$\mathbf{lim}_{\mathbf{x}\to \mathbf{x}_0^-} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \infty \quad \text{lub} \quad \mathbf{lim}_{\mathbf{x}\to \mathbf{x}_0^-} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\infty$$

Niech funkcja $f$ jest określona w pewnym prawostronnym sąsiedztwie punktu $x_0$.

Prosta o równaniu $x = x_0$ jest asymptotą prawostronną wykresu funkcji $f$, jeśli

$$\mathbf{lim}_{\mathbf{x}\to \mathbf{x}_0^+} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \infty \quad \text{lub} \quad \mathbf{lim}_{\mathbf{x}\to \mathbf{x}_0^+} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\infty$$

Niech funkcja f jest określona w pewnym sąsiedztwie punktu $x_0$.

Prosta o równaniu $x = x_0$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji $f$, jeśli jest jednocześnie asymptotą dwustronną (lewostronną i prawostronną) tego wykresu, czyli jeśli

$$\mathbf{lim}_{\mathbf{x}\to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \infty \quad \text{lub} \quad \mathbf{lim}_{\mathbf{x}\to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\infty$$

Funkcja może mieć (ale nie musi) asymptoty pionowe tylko w punktach nieokreśloności. Ilość tych asymptot może być więc nieograniczona.

**Asymptota ukośna:**

Prosta o równaniu $y = ax + b$

$(a, b \in R)$ jest asymptotą ukośną prawostronną (lub lewostronną) wykresu funkcji $y = f(x)$, jeżeli

$\mathbf{lim}_{\mathbf{x}\to\infty}[\mathbf{f}(\mathbf{x}) - (\mathbf{ax} + \mathbf{b})] = \mathbf{0}$ (lub $\mathbf{lim}_{\mathbf{x}\to-\infty}[\mathbf{f}(\mathbf{x}) - (\mathbf{ax} + \mathbf{b})] = \mathbf{0}$).

Asymptota ukośna prawostronna istnieje o ile istnieją i są skończone granice:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad i \quad \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax].$$

Wówczas:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax]$$

Podobnie przy $x$ dążącym do minus nieskończoności (o ile funkcja jest tam określona) oblicza się asymptotę ukośną lewostronną. Funkcja może mieć tylko jedną asymptotę ukośną lewostronną i tylko jedną asymptotę ukośną prawostronną. Asymptota ukośna lewostronna może być jednocześnie asymptotą ukośną prawostronną.

**Asymptota pozioma (szczególny przypadek asymptoty ukośnej):**

Prosta y= b jest asymptotą poziomą prawostronną (lewostronną) wykresu funkcji $f$, jeśli:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \left(\lim_{x\to -\infty} f(x) = b\right).$$

## Reguła de l'Hospitala

Reguła de l'Hospitala pozwala zastosować rachunek różniczkowy do znajdowania granic funkcji, które to granice inaczej byłyby bardzo trudne do określenia. Są to granice takich ilorazów funkcji $\frac{f(x)}{g(x)}$, w których zarówno licznik jak i mianownik dąży do 0 lub licznik i mianownik dążą do $\infty\,(-\infty)$.

Wyrażenia takie nazywamy wyrażeniami nieoznaczonymi typu $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$.

Np. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\mathrm{ctg} x}$ jest wyrażeniem typu $\frac{\infty}{\infty}$,

a $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$ jest wyrażeniem typu $\frac{0}{0}$.

Nie wiemy więc, czy granice te są skończone, czy nieskończone.

## Reguła de l'Hospitala:

Jeśli funkcje $f$ i $g$ są różniczkowalne w pewnym otwartym przedziale $(a, b)$ zawierającym $c$, jeśli $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$ i $x \neq c$ oraz jeśli:

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0 \text{ i } \lim_{x\to c} g(x) = 0$$

lub

$$\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty \text{ i } \lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$$

to

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**UWAGA:** Regułę de l'Hospitala stosuje się również przy $\boldsymbol{x} \to \pm\infty$, dla danej funkcji można ją stosować kilkakrotnie. Iloczyn funkcji i różnicę funkcji można zapisać w postaci ułamka (ilorazu) i wtedy, o ile są spełnione założenia, można również stosować tę regułę.

**Guillaume de l'Hôpital (1661-1704)**

Przykład:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{RH} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\,e^x} = 0$$

**Punkt przegięcia**:

Punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji $y = f(x)$, jeżeli w lewostronnym sąsiedztwie punktu $x_0$ funkcja jest wypukła i w prawostronnym sąsiedztwie punktu $x_0$ wklęsła, lub odwrotnie.

Jeżeli funkcja $y = f(x)$ ma w przedziale $(a; b)$ pochodną $f'(x)$ i drugą pochodną $f''(x)$ ciągłą, to punkt $(x_0, f(x_0))$, gdzie $x_0 \in (a; b)$, jest punktem przegięcia wykresu funkcji $y = f(x)$ $\Leftrightarrow$ gdy $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, a znaki $f''(x)$ w lewostronnym i prawostronnym sąsiedztwie punktu $x_0$ są różne.

## Badanie przebiegu zmienności funkcji y= f(x)

Badanie funkcji ma na celu uzyskanie wyczerpującej informacji o tej funkcji. Elementy w badaniu:

1. **Analiza funkcji**:

a) wyznaczenie dziedziny funkcji
b) zbadanie własności funkcji (parzystość, nieparzystość, okresowość)
c) wyznaczenie punktów przecięcia wykresu funkcji z osią $OX$ oraz z osią $OY$
d) obliczanie granic na krańcach przedziałów określoności i w punktach nieokreśloności
e) wyznaczenie asymptot

**2. Analiza pierwszej pochodnej funkcji:**

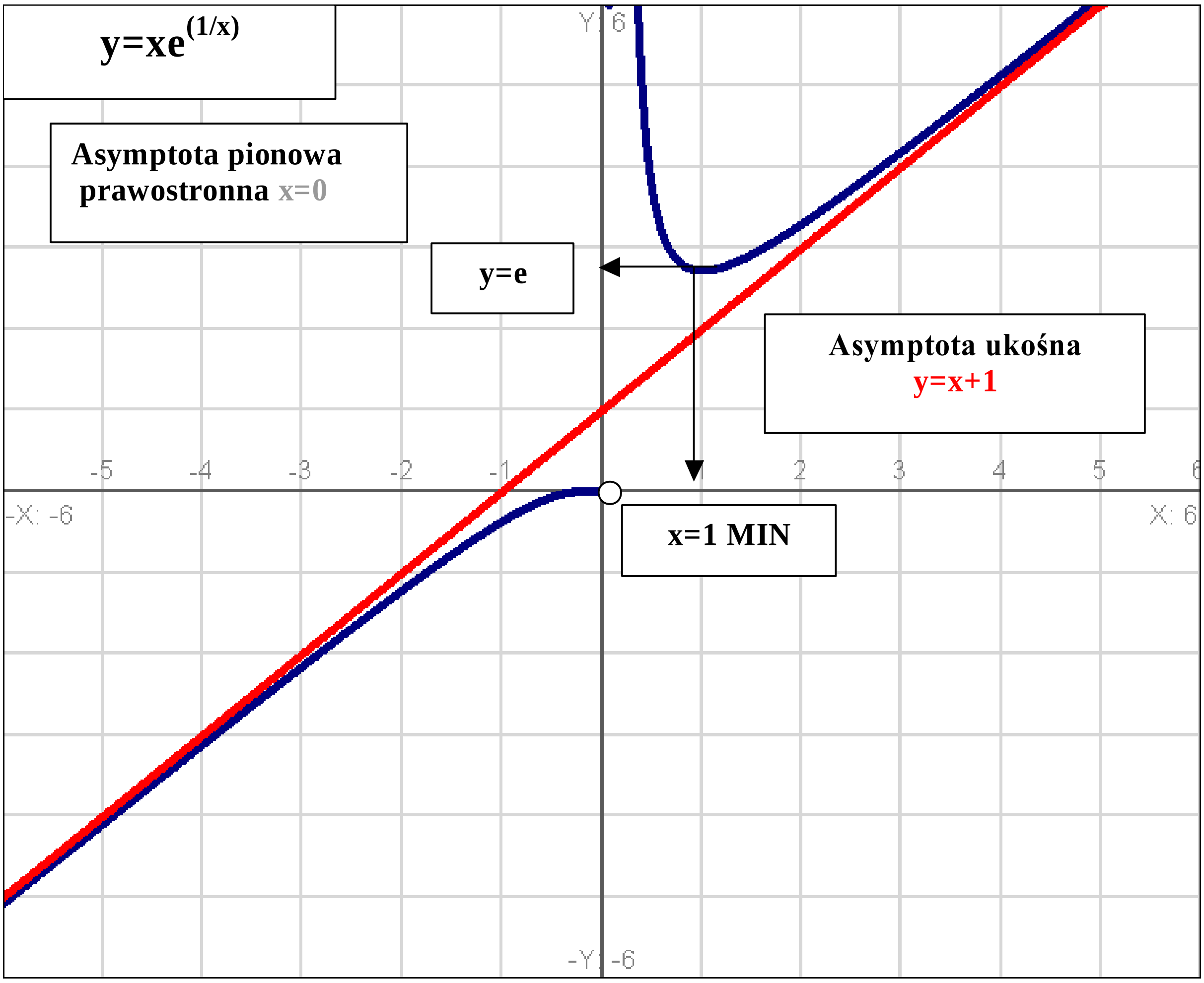
a) wyznaczenie zbioru, w którym funkcja $f$ jest różniczkowalna i wyliczenie pochodnej
b) wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej
c) wyznaczenie zbiorów, w których $f'(x) > 0$ i w których $f'(x) < 0$ - określenie przedziałów monotoniczności funkcji
d) wyznaczenie ekstremów lokalnych funkcji

**3. Analiza drugiej pochodnej:**

a) wyznaczenie zbioru, w którym $f'$ jest różniczkowalna
b) obliczenie drugiej pochodnej
c) wyznaczenie miejsc zerowych drugiej pochodnej
d) określenie przedziałów wklęsłości i wypukłości funkcji
e) wyznaczenie punktów przegięcia
f) wyznaczenie ekstremów funkcji (gdy nie wyznaczono ich w punkcie 2)

**4. Sporządzenie tabeli przebiegu zmienności funkcji**

**Przykładowy wykres będący efektem pełnego badania przebiegu zmienności funkcji:**



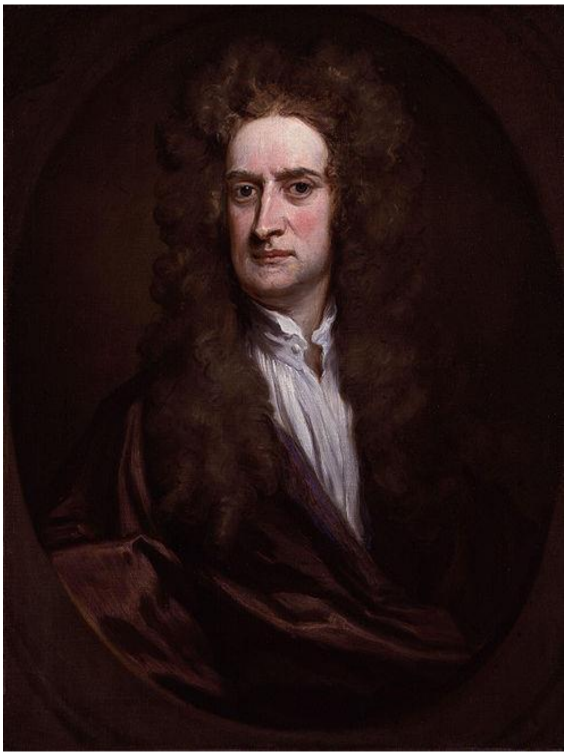

**Pochodna ma też różne zastosowania fizyczne, patrz na przykład:**

http://cmf.p.lodz.pl/mdobrski/index.php?id=pochodna-jako-prdko

## 3.4. POCHODNE HISTORIA

Odniesienie do pochodnej jako stycznej jest bardzo stare, rozważane było już przez greckich geometrów takich jak Euklides (ok. 300 p.n.e.), Archimedes (ok. 287-212 p.n.e.) i Apoloniusz z Perge (ok. 262 - 190 p.n.e.).

Nowoczesny rozwój rachunku różniczkowego zawdzięczamy Isaacowi Newtonowi (1643-1727) i Gottfriedowi Leibnizowi (1646-1716), którzy dostarczyli niezależne i jednolite podejście do różniczkowania i pochodnych. Najistotniejszym osiągnięciem w tym zakresie jest powiązanie różniczkowania i całkowania do obliczania pól figur płaskich i objętości brył, który to problem nie został znacząco rozszerzony od czasu Ibn al-Haytham (Alhazen) (965 – c. 1040).

Sir Isaac Newton (1642 – 1727) Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Kontrowersje pierwszeństwa w rachunku różniczkowym (określane w języku angielskim: calculus controversy a niemieckim Prioritätsstreit to spór między Newtonem i Leibnizem. Newton twierdził, że rozpoczął pracę nad rachunkiem różniczkowym (który nazwał "the method of fluxions and fluents")", w 1666 r. (czy też w 1671 jak piszą niektórzy badacze), w wieku 23 lat. On wyjaśnił jego (geometryczną) postać rachunku różniczkowego w Section I z księgi Book I Principia w 1687, a jego algebraiczną („fluxional") notację opisał w wersji drukowanej w 1693 (w części), a w pełni w 1704.

Leibniz rozpoczął pracę nad jego wariantem rachunku w 1674, a w 1684 opublikował swój pierwszy artykuł (Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus), w którym tego rachunku już używał.

# ROZDZIAŁ IV

# CAŁKI

*Całka* – ***ogólne określenie wielu różnych, choć powiązanych ze sobą pojęć analizy matematycznej. Najczęściej przez "całkę" rozumie się całkę oznaczoną lub całkę nieoznaczoną (rozróżnia się je zwykle z kontekstu).***

*Niektóre idee i metody rachunku całkowego znane były już w starożytności. Na przykład Archimedes (III wiek p.n.e.) obliczał objętości i pola powierzchni różnych brył stosując w istocie metody całkowe.*

## 4.1. CAŁKI NIEOZNACZONE

### Definicja

**Funkcją pierwotną** funkcji $f(x)$ w przedziale $a \le x \le b$ nazywamy każdą funkcję $F(x)$ taką, że $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x$ z przedziału $a \le x \le b$.

**Całką nieoznaczoną** funkcji $f(x)$ oznaczaną symbolem $\int f(x)\,dx$ nazywamy wyrażenie $F(x) + C$, gdzie $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, a $C$ jest dowolną stałą. Mamy więc:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \text{ , gdzie } F'(x) = f(x).$$

Zapis $\int f(x)\,dx$ jest więc skrótowym zapisem pytania: jakiej to funkcji pochodną jest funkcja $f(x)$, a $dx$ w zapisie informuje o zmiennej, względem której całkujemy.

### Podstawowe wzory rachunku całkowitego

a) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C\,, a \neq -1;$

Kilka szczególnych przypadków z różnym $a$ to:

- dla $a = 0$: $\int dx = x + C$; dla $a = \frac{1}{2}$: $\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C,\ x \geq 0;$
- dla $a = -\frac{1}{2}$: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C,\ x > 0;$
- dla $a = -2$: $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,\ x \neq 0;$

b) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\ x \neq 0;$
c) $\int e^x\, dx = e^x + C;$
d) $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1;$
e) $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$
f) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$
g) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,\ \cos x \neq 0;$
h) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,\ \sin x \neq 0;$
i) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc \sin x + C = -arc \cos x + C', -1 < x < 1;$
j) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arc \operatorname{tg} x + C = -arc \operatorname{ctg} x + C';$
k) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right) + C$ (otrzymane poprzez podstawienie Eulera).

## Własności całek nieoznaczonych

a) Stały czynnik można wynieść przed znak całki, tzn.: $\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx\,,\ k \neq 0.$

b) Całka sumy równa się sumie całek, (addytywność całki względem sumy podcałkowej) tzn.

$$\int \big(f(x) - g(x)\big)\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx.$$

Całka różnicy funkcji równa się różnicy całek z tych funkcji:

$$\boldsymbol{\int \big(f(x) - g(x)\big)\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx.}$$

## Metody całkowania

1. Całkowanie przez części

Jeżeli $u, v$ są funkcjami zmiennej $x$ mającymi ciągłą pochodną, to:

$$\int u' \cdot v\, dx = u \cdot v - \int u \cdot v'\, dx$$

Przykład 1:

Oblicz całkę: $\int x \cdot e^x\, dx$

Rozwiązanie:

$$\int x \cdot e^x \, dx = \int e^x \cdot x \, dx$$

$$= \int (e^x)' \cdot x \, dx$$

$$= x \cdot e^x - \int e^x \cdot (x)' \, dx = x \cdot e^x - \int e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

Przykład 2:

Oblicz całkę: $\int x \cdot \sin x \, dx$

Rozwiązanie:

$$\int x \cdot \sin x \, dx = \int \sin x \cdot x \, dx = \int (-\cos x)' \cdot x \, dx$$

$$= x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot (x)' \, dx = -x\,(\cos x) - \int (-\cos x) \cdot 1 \, dx$$

$$= -x\,(\cos x) + \int \cos x \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C$$

2. <u>Całkowanie przez podstawienie</u>

Jeżeli dla $a \le x \le b, g(x) = u$ jest funkcją mającą ciągłą pochodną oraz $A \le g(x) \le B$, a funkcja $f(u)$ jest ciągła w przedziale $[A, B]$, to

$$\int \big(g(x)\big) g'(x) \, dx = \int f(u) \, du,$$

przy czym po scałkowaniu prawej strony należy w otrzymanym wyniku podstawić $u = g(x)$.

Przykład 1.

Oblicz całkę: $\int \frac{5x dx}{x^2+1}$

Rozwiązanie:

$$\int \frac{5x dx}{x^2+1} = \int \frac{5x}{x^2+1} dx = (*)$$

$$x^2 + 1 = t$$

$$(x^2 + 1)' \boldsymbol{dx} = (t)' \boldsymbol{dt}$$

$$2x\boldsymbol{dx} = 1\boldsymbol{dt}$$

$$2x\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{dt}$$

$$x\,dx = \frac{1}{2}dt$$

$$(*) = 5\int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{5}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{5}{2}\ln|t| + C = \frac{5}{2}\ln(x^2+1) + C$$

Odpowiedź: $\int \frac{5x dx}{x^2+1} = \frac{5}{2}\ln|x^2+1| + C$

Z powyższego można wywnioskować ogólniejszy wzór:

$$\int \frac{\boldsymbol{f'(x)dx}}{\boldsymbol{f(x)}} = \mathbf{ln}|\boldsymbol{f(x)}| + \boldsymbol{C}$$

### Własność ogólna

Jeśli $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ to $\int (x+a)\,dx = F(x+a) + C.$

## 4.2. CAŁKI OZNACZONE

Całkę oznaczoną funkcji $f$ w przedziale $[a,b]$ oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

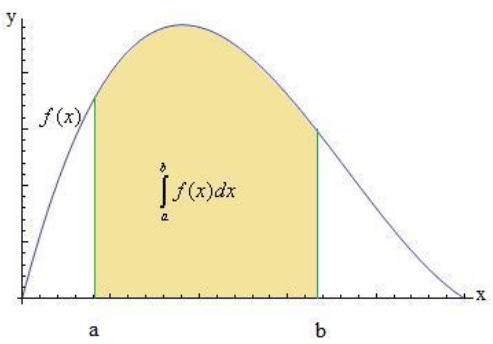
<u>Sposób obliczania</u>: jeżeli $F$ jest funkcją pierwotną funkcji $f$, ciągłej w przedziale $[a,b]$, tzn. jeśli $F'(x) = f(x)$ (a więc $\int f(x)\,dx = F(x) + C$) to zachodzi wzór:

.

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

### Interpretacja geometryczna

Jeżeli w przedziale $[a,b]$ jest $f(x) \geq 0$ to pole obszaru ograniczonego krzywą $y = f(x)$, odcinkiem osi $OX$ oraz prostymi $x = a,\ x = b$ równa się całce oznaczonej

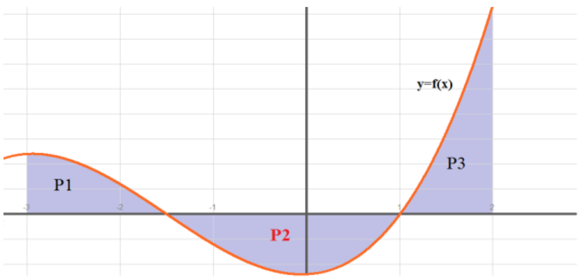


$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Jeżeli zaś w przedziale $[a, b]$ jest $f(x) \le 0$, to analogiczne pole równa się

$$-\int_a^b f(x)\,dx$$

Jeżeli w przedziale $[a, b]$ funkcja przyjmuje wartości ujemne i dodatnie, to całka oznaczona w tym przedziale odejmuje te części pól, które znajdują się pod osią:




$\int_a^b f(x)dx$= P1-P2+P3

## Trochę o historii

*Ukoronowaniem rozwoju całek w historii są prace angielskiego fizyka i matematyka Newtona oraz niemieckiego matematyka i filozofa Leibniza* (tych samych, którzy wprowadzili pochodne)*, które zawierają systematyczny wykład teorii i metod związanych z pojęciem całki oraz wprowadzają terminologię i oznaczenia zbliżone do współczesnych. Ukazują one również związek rachunku całkowego z rachunkiem różniczkowym* oraz *praktyczne metody całkowania prostych typów funkcji. Dlatego też Newtona i Leibniza uważa się za twórców rachunku całkowego.*

# 4.3. ZASTOSOWANIA CAŁEK OZNACZONYCH

## Długość łuku krzywej

Jeżeli krzywa wyznaczona jest równaniem postaci $y = f(x)$, przy czym funkcja $f$ ma w przedziale $a \le x \le b$ ciągłą pochodną, to długość łuku L w tym przedziale wyraża się wzorem:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Przykład 1.

Oblicz długość łuku krzywej będącej wykresem funkcji $y = \ln(1 - x^2)$ dla $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Obliczamy kolejno:

$$f'(x) = \frac{-2x}{1 - x^2}$$

$$1+[f'(x)]]^2 = 1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1 + 2x^2 + x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}$$

Stąd:

$$L = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (-1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1})\, dx = (-x + \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 2\ln 3 - 1$$
$$= 1{,}197$$

## Objętość i pole powierzchni brył obrotowych

Niech dany będzie łuk AB krzywej o równaniu $y = f(x)$ gdzie $f$ jest funkcją ciągłą i nieujemną w przedziale $a \le x \le b$. Wówczas objętość bryły obrotowej ograniczonej powierzchnią powstałą w wyniku obrotu łuku AB dookoła osi $\boldsymbol{OX}$ wyraża się wzorem: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$, gdy obrót wokół osi $\boldsymbol{OY}$: $V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$ (ze znakiem)

Pole powierzchni obrotowej powstałej przez obrót łuku AB wokół osi $\boldsymbol{OX}$ obliczamy według wzoru:

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Przykład 1.

Obliczyć objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót wokół osi $OX$ prostej $y = x$ dla $x \in < 0{,}4 >$.

$$V = \pi \int_0^4 x^2 dx = [\pi \frac{1}{3} x^3 + c]_0^4 = \frac{64}{3}\pi$$

# 4.4. CAŁKI NIEWŁAŚCIWE

## Całki funkcji nieograniczonych

Niech funkcja $f$ nie jest określona w punkcie $x = c$ (c nie należy do dziedziny funkcji $f$)

Jeżeli funkcja $f$ jest ograniczona i całkowalna w każdym przedziale $a \leq x \leq x \leq c - h,\ h > 0$ i jeżeli istnieje granica:

$$\lim_{h \to 0} \int_a^{c-h} f(x)\, dx,$$

to granicę te nazywamy całką niewłaściwą funkcji $f$ w przedziale $[a, c]$ i oznaczamy symbolem $\int_a^c f(x)\, dx$.

Jeżeli funkcja $f$ jest ograniczona i całkowalna w każdym przedziale $c + k \leq x \leq b, k > 0$ i jeżeli istnieje granica:

$$\lim_{k \to 0} \int_{c+k}^{b} f(x)\, dx,$$

to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą funkcji $f$ w przedziale $[b, c]$ i oznaczamy symbolem $\int_b^c f(x)\, dx$.

Jeżeli funkcja $f$ jest ograniczona i całkowalna w każdym przedziale $a \leq x \leq x \leq c - h,\ h > 0$ oraz w każdym przedziale $c + k \leq x \leq b, k > 0$ i jeżeli istnieją granice:

$$\lim_{h \to 0} \int_a^{c-h} f(x)\, dx \text{ oraz } \lim_{k \to 0} \int_{c+k}^{b} f(x)\, dx,$$

to sumę tych granic nazywamy całką niewłaściwą funkcji $f$ w przedziale $[a, b]$ i oznaczamy symbolem $\int_a^b f(x)\, dx$.

**Jeżeli któraś z powyższych granic nie istnieje lub jest nieskończona, to mówimy, że całka niewłaściwa jest rozbieżna**.

Przykład 1.

Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx$.

Rozwiązanie:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{b\to 0+} \int_b^1 x^{-3}\,dx = \lim_{b\to 0+} \left[\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}\right]_b^1 = \lim_{b\to 0+}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right]_b^1 =$$

$= \lim_{b\to 0+}\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b^2}\right] = \infty,$ czyli ta całka jest rozbieżna.

## Całki oznaczone w przedziale nieskończonym

Jeżeli funkcja $f$ jest ograniczona i całkowalna w każdym przedziale skończonym $a \le x \le v$ ($a$- ustalone, $v$- dowolne ) oraz istnieje granica $\lim_{v\to\infty}\int_a^v f(x)\,dx$, to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą funkcji $f$ w przedziale $a \le x \le +\infty$ i oznaczamy symbolem $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Analogicznie określa się znaczenie symbolu : $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ jako granicę $\lim_{b\to\infty}\int_u^b f(x)\,dx$.

Przykład 2.

Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\,dx$.

Rozwiązanie:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-3}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right]_1^b =$$

$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b^2}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}$ , czyli ta całka jest zbieżna.

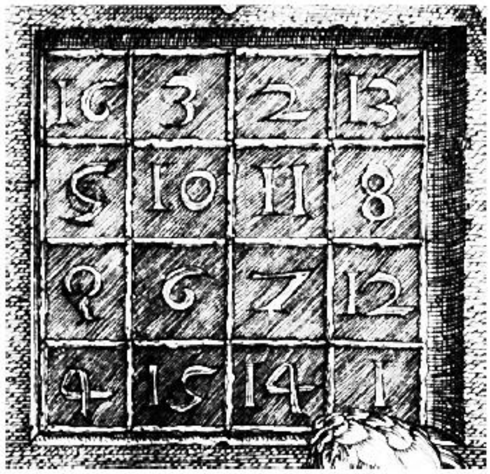
# ROZDZIAŁ V

# MACIERZE

## 5.1. KILKA SŁÓW O HISTORII

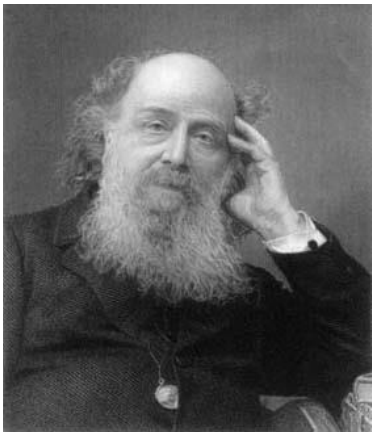
Wykonywaniem jednocześnie działań na zbiorze liczb zamiast na jednej liczbie interesowano się już w starożytności. Dodać też należy, że tablice liczb o pewnych własnościach ze względu na specyficzne ułożenie tych liczb frapowało nawet artystów. Na poniższym obrazie Albrecht Dürer dodał tablicę liczb zwaną kwadratem magicznym, którym sumy w wierszach, kolumnach i na przekątnych są takie same (tu wynoszą 34).

Albrecht Durer (1471 – 1528): *Melancholia*




*kwadrat magiczny nad skrzydłem anioła*

Pojęcie macierz  po raz pierwszy zostało użyte przez Jamesa Josepha Sylvestera w 1850 roku.



James Joseph Sylvester (1814-1897)

## 5.2. DEFINICJA MACIERZY, DZIAŁANIA NA MACIERZACH

**Macierzą** nazywamy tablicę liczb rzeczywistych uporządkowaną ze względu na położenie jej elementów w wierszach i kolumnach.

**Macierz będziemy zapisywali w  postaci:**

$$\boldsymbol{A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}$$

Na przykład :

(macierz o wymiarach 3 x 4)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & -9 \\ 12 & 0 & -3 & 27 \\ 15 & 9 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Każdy wiersz ma dokładnie tyle elementów, ile jest kolumn w macierzy, liczba elementów każdej kolumny jest równa liczbie wierszy w macierzy. Parę liczb (m, n), z których pierwsza określa liczbę wierszy, druga liczbę kolumn, nazywa się **wymiarem macierzy.** Jeżeli m = n, to macierz  **A**= $(\mathbf{a_{ij}})_{n \times n}$ nazywamy macierzą kwadratową stopnia n. Macierze oznaczamy dużymi literami z początku lub środka alfabetu, np. **A, B, M.**

Macierz jest więc uogólnieniem liczby i wektora. Składa się z wektorów w wierszach i jednocześnie z wektorów w kolumnach.

## Działania na macierzach

(Działania algebraiczne na macierzy podlegają pewnym ograniczeniom)

## Dodawanie

Dodawanie dwóch macierzy jest możliwe tylko dla macierzy o jednakowych liczbach wierszy (m)
i kolumn (n). Działanie to określa się wzorem
**$[c_{ij}] = [a_{ij}] + [b_{ij}]$, gdzie $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$,**
tj. sumą dwóch macierzy jest macierz, której elementy są sumami odpowiednich elementów macierzy dodawanych (ta sama reguła obowiązuje przy dodawaniu wektorów). Tak określoną macierz **C** nazywamy sumą macierzy **A** i **B** i zapisujemy **C**=**A**+**B**.
Elementem neutralnym w dodawaniu jest macierz zerowa, tj. macierz której wszystkie elementy są równe 0.

Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \; C = A + B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

## Mnożenie macierzy przez liczbę (skalar)

Mnożenie macierzy **A**=**[ $a_{ij}$ ]** przez daną liczbę *d* określa się wzorem

$$d\mathbf{A} = d[\mathbf{a}_{ij}] = \mathbf{C} = [\mathbf{c}_{ij}] = [d\mathbf{a}_{ij}]$$

tzn. iloczynem macierzy **[ $a_{ij}$ ]** przez liczbę *d* jest macierz **[ $c_{ij}$ ],** której wyrazy

są iloczynami wyrazów macierzy **[ $a_{ij}$ ]** przez liczbę *d* .

Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \; B = 4A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 28 \end{bmatrix}$$

## Mnożenie macierzy przez inną macierz

Niech A= $[ a_{ij} ]_{m \times p}$ , B= $[ b_{ij} ]_{q \times n}$ .

Iloczyn AB macierzy A i B istnieje wtedy i tylko wtedy gdy q=p.

Wówczas iloczynem jest macierz C = AB $=[ c_{ij} ]_{m \times n}$, gdzie

$$\mathbf{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}}$$

czyli $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$

Inaczej:

Iloczynem macierzy w przypadku, gdy pierwsza **A**= **[ $a_{ij}$ ]** ma tyle kolumn, ile druga **B** = **[ $b_{ij}$ ]** ma wierszy, tzn. **[ $a_{ij}$ ]** dla *i=1,2,...,m ; j=1,2,...,p* oraz **[ $b_{ij}$ ]** dla *i=1,2,...,p ; j=1,2,...,n*, jest macierz

**C** = **[ $c_{ij}$ ]**, której element $\mathbf{c_{ij} = a_{i1}\ b_{1j} + a_{i2}\ b_{2j} + \ldots + a_{ip}\ b_{pj}}$ , dla *i=1,2,...,m ; j=1,2,...,n*.

Macierz **C** = **[ $c_{ij}$ ]** ma więc tyle wierszy co macierz **[ $a_{ij}$ ]** i tyle kolumn co macierz **[ $b_{ij}$ ]** .

Elementem neutralnym mnożenia macierzy jest macierz kwadratowa stopnia *n*, w której elementy głównej przekątnej są jedynkami ($a_{ii}$=1, i=1, ..., n) a pozostałe elementy są zerami. Nazywamy ją macierzą jednostkową i oznaczamy przez I**,** poniżej macierze jednostkowe stopni: 1, 2, 3, 4, 5.

$$[\mathbf{1}], \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

### Mnożenie macierzy nie jest przemienne

Ogólnie dla macierzy A i B nie zachodzi AB =BA, choć są macierze, dla których to zachodzi.

Przykłady:

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\0&7\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}5&1\\-2&0\end{bmatrix},\qquad C=AB=\begin{bmatrix}1\cdot5+2\cdot(-2)&1\cdot1+2\cdot0\\0\cdot5+7\cdot(-2)&0\cdot1+7\cdot0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\-14&0\end{bmatrix}$$

$$D=BA=\begin{bmatrix}5\cdot1+1\cdot0&5\cdot2+1\cdot7\\(-2)\cdot1+0\cdot0&(-2)\cdot2+0\cdot7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&17\\-2&-4\end{bmatrix}$$

Schemat Falka (obliczanie iloczynu macierzy)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | B= | | | | |
| | | | | | | |
| A= | | | | | | C=AB |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | B= | -1 | 1 | 3 | |
| | | | 1 | 2 | 2 | |
| A= | 2 | 1 | **-1** | **4** | **8** | **C=AB** |
| | -1 | 2 | **3** | **3** | **1** | |
| | 3 | -1 | **-4** | **1** | **7** | |
| | 4 | 0 | **-4** | **4** | **12** | |

BA nie istnieje

## Prawa działań na macierzach

Zauważmy, że dodawanie macierzy jest przemienne, natomiast mnożenie macierzy nie jest przemienne, o czym przekonuje następujący przykład:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{3}&\mathbf{4}\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\end{bmatrix}$$

Mamy tutaj $\boldsymbol{A_{2X2}}*\boldsymbol{B_{2X1}}=\boldsymbol{C_{2X1}}=\begin{bmatrix}\mathbf{5}\\\mathbf{11}\end{bmatrix}$ natomiast $\boldsymbol{B_{2X1}}*\boldsymbol{A_{2X2}}$ nie istnieje.
Zachodzą natomiast następujące prawa:

1. A(BC) = (AB)C - mnożenie macierzy jest łączne

2. (A+B)C = AC + BC - mnożenie macierzy jest rozdzielne względem dodawania
3. C(A+B) = CA + CB

4. jeżeli A ma wymiar $\boldsymbol{m}*\boldsymbol{n}$ to $\boldsymbol{I_{mxm}}*\boldsymbol{A_{mxn}}=\boldsymbol{A_{mxn}}*\boldsymbol{I_{nxn}}=\boldsymbol{A}$.

Przykład: Niech $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{-1}\\\mathbf{0}&\mathbf{2}\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{3}&\mathbf{-1}\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\\\mathbf{3}\end{bmatrix}$

Wówczas

$$\boldsymbol{A(BC)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{8} \end{bmatrix}$$

oraz

$$\boldsymbol{(AB)C} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{8} \end{bmatrix},$$

a więc zachodzi warunek 1.

Pokażemy, że zachodzi np. warunek 4. Mamy

$$\boldsymbol{I_{2x2}} * \boldsymbol{A_{2x2}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A_{2x2}} * \boldsymbol{I_{2x2}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$$

Macierz, która powstaje z macierzy A= [ $a_{ij}$ ] przez zamianę wierszy i kolumn, nazywa się macierzą przestawioną lub macierzą transponowaną macierzy **A** i

oznacza się ją symbolem $A^T$ (lub A'):

$A^T = B = [\, b_{ij} \,]$, gdzie $b_{ij} = a_{ji}$.

**Przykład:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Macierz **kwadratową** B= [ $b_{ij}$ ] nazywamy odwrotną do A**,** jeżeli AB = I i oznaczamy $B=A^{-1}$ (o ile istnieje) . Iloczyn macierzy i macierzy do niej odwrotnej jest przemienny: $AA^{-1} = I$ (i wtedy też $= A^{-1}A$).

Przykład:

Znajdziemy macierz odwrotną do $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$.

Ponieważ $AA^{-1} = I$ więc

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \text{ czyli } \begin{bmatrix} \boldsymbol{a+2c} & \boldsymbol{b+2d} \\ \boldsymbol{3a+4c} & \boldsymbol{3b+4d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a+2c=1} \\ \boldsymbol{b+2d=0} \\ \boldsymbol{3a+4c=0} \\ \boldsymbol{3b+4d=1} \end{cases} \quad \text{skąd } \boldsymbol{a=-2, b=1, c=\frac{3}{2}, d=-\frac{1}{2}}.$$

A więc $\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{\frac{3}{2}} & \boldsymbol{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$. Powyższa metoda obliczania macierzy odwrotnej nie jest zalecana. Efektywniejsza metoda będzie podana później.

## 5.3. WYZNACZNIK

Z każdą macierzą kwadratową związana jest liczba zwana wyznacznikiem. Wyznacznik macierzy A oznaczamy $|A|$ lub det A**.** Liczba kolumn lub wierszy macierzy jest stopniem wyznacznika tej macierzy.

Obliczanie wyznacznika zdefiniujemy indukcyjnie:

1) dla n=1 bezpośrednio
2) dla ustalonego n poprzez wyznaczniki macierzy stopnia n-1.

Obliczając wyznacznik stopnia n>1 skorzystamy z pojęcia wyznacznika stopnia n-1 zwanego minorem albo podwyznacznikiem ($M_{ij}$) macierzy kwadratowej, gdy n>1.

### Minor

Minorem macierzy $A=[\ a_{ij}\ ]_{m\ x\ n}$ nazywamy każdy wyznacznik det B, gdzie $B=[\ b_{ij}\ ]_{s\ x\ s}$ jest macierzą kwadratową otrzymaną przez skreślenie pewnej liczby wierszy i kolumn w macierzy A, więc $s \le \min(m,n)$.

Minorem $M_{ij}$ kwadratowej macierzy stopnia n nazywamy wyznacznik det B (i,j) gdzie

$B\,(i,j)_{(n-1)x\,(n-1)}$ jest macierzą kwadratową stpnia n-1 otrzymaną przez skreślenie i-tego wiersza

oraz j-tej kolumny w macierzy A.

Dopełnienie algebraiczne elementu $a_{ik}$ - $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ **.**

MACIERZ DOPEŁNIEŃ MACIERZY **A**: $\mathbf{D_A}$

### Indukcyjna definicja (obliczanie) wyznacznika:

Jest to liczba **det A** przyporządkowana macierzy kwadratowej **A** (stopnia n) wg następującej reguły:

1) jeśli **A= [ $\mathbf{a_{11}}$ ]** jest macierzą kwadratową stopnia **1**, to **det A= $\mathbf{a_{11}}$**;
2) jeśli **A= [ $\mathbf{a_{ij}}$ ]** jest macierzą kwadratową **stopnia n>1** to:

$\mathbf{det\ A = a_{i1}\,A_{i1} + a_{i2}\,A_{i2} + \ldots + a_{in}\,A_{in}}$ (rozwinięcie wg i-tego wiersza)

lub

$\mathbf{det\ A = a_{1j}\,A_{1j} + a_{2j}\,A_{2j} + \ldots + a_{nj}\,A_{nj}}$ (rozwinięcie wg j-tej kolumny),

$1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n.$

Powyższe wzory nazywa się rozwinięciem Laplace'a (Twierdzenie Laplace'a)


Pierre-Simone Laplace (1749-1827)

Ta reguła indukcyjna sprowadza obliczanie wyznacznika danej macierzy poprzez obliczanie wyznaczników macierzy niższych stopni.
Często stosowany symbol :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

na oznaczenie wyznacznika det **A** .

## Obliczanie wyznacznika macierzy drugiego stopnia

Aby obliczyć wyznacznik macierzy drugiego stopnia należy przemnożyć przeciwległe elementy macierzy według poniższego schematu, a następnie dokonać ich odejmowania. Podczas odejmowania należy zwrócić uwagę na to, która liczba jest liczbą odejmowaną):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

**Przykład:**

Oblicz wyznacznik macierzy A=$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

$$\det\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \mathbf{2\cdot 7 - (-4)\cdot 5 = 14 - (-20) = 14 + 20 = 36}$$

## Obliczanie wyznacznika macierzy trzeciego stopnia:

**Dwa sposoby:**

**Sposób pierwszy:** Za pomocą **Twierdzenia Laplace'a:**

a) Rozwinięcie względem **i-tego wiersza:** det **A** = $\mathbf{a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}}$

b) Rozwinięcie względem **j-tej kolumny:** det **A** = $\mathbf{a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}}$

gdzie:
$\mathbf{A_{ij}}$ = $(-1)^{i+j} M_{ij}$ (dopełnienie macierzy)
$\mathbf{a_{ij}}$ - element macierzy w i-tej kolumnie i j-tym wierszu
$\mathbf{M_{ij}}$ – wyznacznik macierzy powstałej po usunięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny

Warunki: $\mathbf{1 \le i \le n,}$ $\mathbf{1 \le j \le n.}$

**Ad. a)**

Rozwinięcie wyznacznika względem drugiego wiersza:

$$\det[A] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ ← Drugi wiersz

**det**$[A] = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = a_{21}(-1)^{2+1} M_{21} + a_{22}(-1)^{2+2} M_{22} + a_{23}(-1)^{2+3}M_{23}$

**Przykład:**

Oblicz wyznacznik dla macierzy: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie:

$$\det[A] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Numer wiersza i kolumny elementu 0

$$\det[A] = (-1)^{2+1}\cdot 0\cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 1\cdot 8 + (-2)\cdot 12 = -16$$

Wyznacznik macierzy po usunięciu drugiego **wiersza** i trzeciej **kolumny** z macierzy A

**Ad. b)**

Rozwinięcie wyznacznika względem trzeciej kolumny

$$\det[\boldsymbol{A}] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$\mathbf{det}[\boldsymbol{A}] = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = a_{13}(-1)^{1+3} M_{13} + a_{23}(-1)^{2+3} M_{23} + a_{33}(-1)^{3+3} M_{33}$

**Przykład:**

Oblicz wyznacznik dla macierzy: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$

Rozwiązanie:

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{det}[\boldsymbol{A}] = (-\mathbf{1})^{\mathbf{1+3}} \cdot -\mathbf{1} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{vmatrix} + (-\mathbf{1})^{\mathbf{2+3}} \cdot \mathbf{2} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{vmatrix} + (-\mathbf{1})^{\mathbf{3+3}} \cdot \mathbf{5} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$
$$= -\mathbf{1} \cdot \mathbf{2} + (-\mathbf{2}) \cdot \mathbf{12} + \mathbf{5} \cdot \mathbf{2} = -\mathbf{2} - \mathbf{24} + \mathbf{10} = -\mathbf{16}$$

**Sposób drugi:**

**Schemat Sarrusa** – aby obliczyć wyznacznik tą metodą należy dwa pierwsze wiersze skopiować pod macierz, a następnie postępować według poniższego schematu. Zamiast wierszy można skopiować dwie pierwsze kolumny i przenieść je na lewą stronę macierzy.

$$\mathbf{det[A]=} \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

**Przykład:**

Oblicz wyznacznik macierzy: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$

Rozwiązanie:

$$\mathbf{det}[\boldsymbol{A}] = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \end{vmatrix} = \mathbf{10} + \mathbf{0} + (-\mathbf{12}) - \mathbf{2} - \mathbf{12} - \mathbf{0} = -\mathbf{16}$$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} & 10 \\ 12 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & 0 \end{array}$$

Wyznaczniki znacznie upraszczają algorytmy rozwiązywania układów wielu równań algebraicznych, wprowadził je G. Cramer w połowie XVIII w.


Gabriel Cramer (1704-1752)

Stosując sposób pierwszy do obliczenia wyznacznika (za pomocą **Twierdzenia Laplace'a**) należy zapamiętać, że warto rozwijać wyznacznik względem wiersza (kolumny), w którym są **elementy zerowe**.

Celem obliczenia złożonego wyznacznika powinniśmy najpierw wprowadzić do macierzy zera.
Można to zrobić korzystając z następujących **własności wyznaczników:**

1. Zamiana dwóch wierszy (kolumn) macierzy zmienia znak wyznacznika
2. Wyznacznik macierzy, w której wszystkie elementy jednego wiersza (kolumny) są równe zeru, jest równy zeru
3. Wyznacznik macierzy, w której jeden wiersz (kolumna) został pomnożony przez stałą c jest równy wyznacznikowi macierzy wyjściowej pomnożonemu przez tę stałą. Zatem
$$det\,(c\mathbf{A}) = c^n det\,(\mathbf{A}).$$
4. Wyznacznik macierzy, w której dwa wiersze (kolumny) są proporcjonalne jest równy zeru.
5. **Jeżeli do dowolnego wiersza (kolumny) dodamy inny wiersz (kolumnę) pomnożony przez dowolną liczbę różną od zera to takim przekształceniem macierzy nie zmieniamy wartości jej wyznacznika !**

## Obliczanie wyznacznika macierzy czwartego i wyższego stopnia

Etapy liczenia wyznaczników macierzy stopnia czwartego i wyższego:

1. Doprowadzenie wiersza (kolumny) do takiej postaci, że znajdują się w niej tylko zera i jedynka („**wyzerowanie" kolumny/wiersza).**
2. Wykreślenie wiersza i kolumny przy użyciu **rozwinięcia Laplace'a.**
3. Obliczenie wyznacznika stopnia mniejszego o 1.

**Ad. 1**

Aby doprowadzić wiersz lub kolumnę do takiej postaci, że znajdują się w niej tylko zera i jedynka należy zastosować **operacje elementarne na macierzach** (dotyczą dowolnych macierzy):

- Zamiana wierszy (kolumn)
- Mnożenie wiersza (kolumny) przez liczbę
- Dodanie do wiersza (kolumny) innego wiersza (kolumny) pomnożonego (-nej) przez liczbę

Kolumna w której będą tylko zera i jedynka

**Przykład:**

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad \det[A]=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

„**Zerując**" drugą kolumnę należy posłużyć się „jedynką" z ostatniego wiersza. Należy wykonać następujące kroki:

1. Przemnożyć czwarty wiersz przez -2 i dodać go do trzeciego wiersza:

$$*(-2)\quad\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

2. Przemnożyć czwarty wiersz przez 2 i dodać go do drugiego wiersza:

$$*2\quad\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

3. Przemnożyć czwarty wiersz przez -3 i dodać go do pierwszego wiersza:

$$*(-3)\quad\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -6 & 0 & -5 & 6 \\ 5 & 0 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

„Wyzerowana" kolumna

**Ad. 2**

Wykreślenie wiersza i kolumny przy użyciu **rozwinięcia Laplace'a:**

$$\begin{vmatrix} -6 & 0 & -5 & 6 \\ 5 & 0 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \\ \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-2} \end{vmatrix} = \mathbf{1} \cdot (-\mathbf{1})^{\mathbf{4}+\mathbf{2}} \cdot \begin{vmatrix} -6 & -5 & 6 \\ 5 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

**Ad. 3**

Obliczenie wyznacznika stopnia mniejszego o 1:

$$\mathbf{1} \cdot (-\mathbf{1})^{\mathbf{4}+\mathbf{2}} \cdot \begin{vmatrix} -6 & -5 & 6 \\ 5 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{1} \cdot \underbrace{\big(-\mathbf{60} + \mathbf{0} + \mathbf{15} - (-\mathbf{90}) - \mathbf{0} - (-\mathbf{50})\big)}_{\text{Obliczone za pomocą schematu Sarrusa}} = -\mathbf{60} + \mathbf{15} + \mathbf{140} = \mathbf{95}$$

## 5.4. OPERACJE ELEMENTARNE NA MACIERZACH

Operacje elementarne na macierzach służą do przekształcania (redukowania) macierzy do innych postaci po to by uzyskać informacje w nich zawarte:
(dotyczą dowolnych macierzy):

- Zamiana wierszy (kolumn)
- Mnożenie wiersza (kolumny) przez liczbę
- Dodanie do wiersza (kolumny) innego wiersza (kolumny) pomnożonego (-nej) przez liczbę

**W dalszych rozważaniach dotyczących macierzy i ich wykorzystania posługiwać się będziemy głównie operacjami elementarnymi na wierszach.**

**Postać wierszowo zredukowana macierzy (postać schodkowa):**

1. W każdym wierszu pierwszy niezerowy element to **1** (nazywamy ją jedynką prowadzącą)
2. W kolumnie, w której znajduje się jedynka prowadząca, wszystkie inne elementy są zerami
3. Wiersze zerowe są na końcu

Dla jednoznaczności przyjmujemy, że jedynka prowadząca w pierwszym wierszu jest na pierwszej pozycji a pozostałe są w miarę możliwości kolejno na dalszych pozycjach, np.

Postać wierszowo zredukowana macierz to w pewnym sensie macierz najbliższa macierzy jednostkowej, patrz przykłady:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 2 |
| 0 | 1 | 0 | 5 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 3 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 3 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 3 |
| 0 | 0 | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | -1 |
| 0 | 1 | 3 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

## 5.5. OBLICZANIE MACIERZY ODWROTNEJ

Dana jest macierz **A nieosobliwa**, czyli o wyznaczniku różnym od zera.
**Macierzą odwrotną** do macierzy kwadratowej A nazywamy taką macierz $\mathbf{A}^{-1}$, że

$$\boldsymbol{A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I}$$

Jeżeli $\mathbf{D_A}=[A_{ij}]$ (macierz dopełnień algebraicznych), to

$$\boldsymbol{A^{-1}=\frac{1}{det[A]}(D_A)^T}$$

**Jeżeli det[A] = 0, to $\mathbf{A}^{-1}$ NIE ISTNIEJE!**

Macierz odwrotną można obliczyć umiejętnie stosując **operacje elementarne na wierszach macierzy**.

Aby więc znaleźć macierz odwrotną do **A** przekształcamy macierz $[A\,|\,I]$ do macierzy postaci $[I\,|\,A^{-1}]$ (o ile jest to możliwe).

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right]$$ (wprowadzamy zera do pierwszej kolumny)

1). $\boldsymbol{W_2'=W_2+W_1}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right]$$

2). $\boldsymbol{W_2'=\frac{W_2}{2}}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right]$$

3). $\boldsymbol{W_3'=W_3+(-1)W_2}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{1} \end{array}\right]$$

4). $\boldsymbol{W_1'=\frac{W_3}{3}}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \end{array}\right]$$

5.) $\boldsymbol{W_3'=W_1+W_3}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \end{array}\right]$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}5 & -1 & 2\\ 3 & 3 & 0\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

## Rząd macierzy

**Rząd macierzy to stopień największej jej podmacierzy kwadratowej nieosobliwej (czyli o wyznaczniku różnym od zera).**

Jeżeli $A=[\,a_{ij}\,]_{m\times n}$ rząd macierzy A: $rz(\mathbf{A})\leq \min\{m,n\}$.

Rząd macierzy to również **liczba jedynek prowadzących** w jej postaci zredukowanej.

Operacje elementarne na wierszach i kolumnach macierzy nie zmieniają jej rzędu!

**Przykład 1. :**

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Rząd wynosi 3, gdyż skreślając np. czwartą kolumnę otrzyma się macierz

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

której wyznacznik wynosi –5.

**Przykład 2. :**

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -4 & 4\\ 3 & 2 & -1 & 1\\ 1 & -4 & 7 & 5\end{bmatrix}$$

$W_2' = W_2 + (-3)W_1;\ W_3' = W_3 + (-1)W_1$ (wprowadzamy zera do pierwszej kolumny):

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -4 & 4\\ 0 & -7 & 11 & -11\\ 0 & -7 & 11 & 1\end{bmatrix}$$

$W_2' = \frac{W_2}{-7}$ (chcemy, by $a_{22} = 1$):

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -4 & 4\\ 0 & 1 & -\frac{11}{7} & -\frac{11}{7}\\ 0 & -7 & 11 & 1\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{W_1{}' = W_1 + (-3)W_2;\ \ W_3{}' = W_1 + 7W_2}$ (wprowadzamy zera do drugiej kolumny):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{\frac{5}{7}} & \mathbf{-\frac{5}{7}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-\frac{11}{7}} & \mathbf{-\frac{11}{7}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{12} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{W_3{}' = \frac{W_3}{12}}$ (zamieniamy miejscami kolumny 3 i 4):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{\frac{5}{7}} & \mathbf{-\frac{5}{7}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{\frac{11}{7}} & \mathbf{-\frac{11}{7}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{W_1 = W_1 + \frac{5}{7}W_3;\ \ W_2 = W_2 + (-\frac{11}{7})W_3}$ (wprowadzamy zera do trzeciej kolumny):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-\frac{5}{7}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-\frac{11}{7}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

**Rząd wynosi 3**

**Przekształcanie macierzy do postaci wierszowo zredukowanej**:

$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 14 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $W_1{}' = W_1 + (-1)W_2$ (chcemy, by $a_{11}$ =1)

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 3 & 1 & 14 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $W_2{}' = W_2 + (-3)W_1;\ \ W_3 = W_3 + (-2)W_1$ (wprowadzamy zera do pierwszej kolumny)

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 7 & 35 \\ 0 & 7 & 14 \end{bmatrix}$ $W_2{}' = W_2 : 7;\ \ W_3 = W_3 : 7$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $W_1{}' = W_1 + 2W_2;\ \ W_3 = W_3 + (-1)W_2$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ $W_3{}' = W_3 : 3$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $W_1{}' = W_1 + (-3)W_3;\ \ \ W_2 = W_2 + (-5)W_3$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

# ROZDZIAŁ VI

# UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

## 6.1. DEFINICJA UKŁADU RÓWNAŃ LINIOWYCH

Układ *m* równań liniowych o *n* niewiadomych $\mathbf{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n}$ ma następującą postać:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Układ równań liniowych może mieć:

- niewiadomych więcej niż równań (n > m),
- niewiadomych tyle co równań (n = m),
- niewiadomych mniej niż równań (n < m).

Macierz $\mathbf{A} = (\mathbf{a_{ij}})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

utworzoną ze współczynników przy niewiadomych $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ nazywamy *macierzą współczynników przy niewiadomych* lub ***macierzą układu równań liniowych.***

Wektor **b** = ($b_i$) utworzony z prawych stron

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

nazywamy ***wektorem wyrazów wolnych***.

Zatem powyższy układ równań liniowych możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$\boldsymbol{Ax = b,}$$

gdzie **x** = ($x_j$) oznacza wektor złożony z kolejnych niewiadomych.

Jeżeli n = m, to det **A** nazywamy *wyznacznikiem układu równań liniowych.*
Zapisując macierz A układu równań liniowych w postaci wektora wierszowego

$$\boldsymbol{A = [a_1, a_2, \dots, a_n],}$$

gdzie wektor $a_j$ (j = 1, 2, ..., n) jest j-tym wektorem kolumnowym macierzy A, układ równań zapisujemy w postaci

$$\boldsymbol{x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = b}$$

i nazywamy ***postacią wektorową układu równań liniowych.***

## Klasyfikacja układów równań liniowych

Rozpatrzmy układ równań liniowych

$$\boldsymbol{Ax = b}$$

Jeżeli wektor **b** jest wektorem zerowym, to układ równań liniowych nazywamy *układem równań liniowych jednorodnych.* W przypadku gdy co najmniej jedna współrzędna wektora **b** jest różna od zera, układ nazywamy *układem równań liniowych niejednorodnych.*

Rozwiązaniem *układu równań liniowych* $\boldsymbol{Ax = b}$ jest każdy wektor **x,** którego współrzędne spełniają wszystkie równania tego układu.

Zbiór wszystkich takich wektorów nazywamy *zbiorem rozwiązań układu równań liniowych.*

Dla każdego układu równań liniowych zachodzi dokładnie jeden z trzech poniższych przypadków:

a) zbiór rozwiązań układu równań jest zbiorem pustym, tzn. układ nie ma żadnego rozwiązania; układ taki nazywamy *układem sprzecznym,*

b) zbiór rozwiązań układu równań zawiera dokładnie jeden element, tzn. układ ma dokładnie jedno rozwiązanie; układ taki nazywamy *układem oznaczonym,*

c) zbiór rozwiązań układu zawiera nieskończenie wiele elementów, tzn. układ ma nieskończenie wiele rozwiązań; układ taki nazywamy *układem nieoznaczonym.*

Mówimy, że dwa układy równań liniowych są *układami równoważnymi,* jeżeli każde rozwiązanie pierwszego układu równań jest jednocześnie rozwiązaniem układu drugiego i odwrotnie, każde rozwiązanie drugiego układu równań jest jednocześnie rozwiązaniem układu pierwszego.

$\mathbf{A^U = [A:b]}$ - macierz uzupełniona układu

**Twierdzenie Kroneckera-Capelli'ego:**

1) rz $(\mathbf{A^U}) >$ rz $(\mathbf{A})$ **- układ sprzeczny (0 rozw.)**
2) rz $(\mathbf{A^U}) =$ rz $(\mathbf{A}) = \mathbf{n}$ **- układ oznaczony (1 rozw.)**
3) rz $(\mathbf{A^U}) =$ rz $(\mathbf{A}) < \mathbf{n}$ **- układ nieoznaczony (∞ rozw.),**

gdzie **n** – liczba niewiadomych.

Z twierdzenia Kroneckera – Capelli'ego wynika, że układ równań liniowych **jednorodnych (Ax = 0)** ma zawsze rozwiązanie. Rozwiązaniem tym jest tak zwane *rozwiązanie trywialne*

$$\boldsymbol{x_1 = 0}, \quad \boldsymbol{x_2 = 0}, \quad \dots \quad \boldsymbol{x_n = 0}$$

Jednocześnie z twierdzenia Kroneckera – Capelli'ego wynika, że warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia nietrywialnego rozwiązania układu równań liniowych jednorodnych jest to, aby rz($\mathbf{A}$) < n.

## 6.2. UKŁAD CRAMERA

Rozpatrzmy układ $\boldsymbol{n}$ równań liniowych o $\boldsymbol{n}$ niewiadomych

$$\boldsymbol{Ax = b,}$$

tzn. macierz A jest macierzą kwadratową stopnia *n.*

Układ ten nazywamy *układem Cramera równań liniowych,* jeżeli wyznacznik układu jest różny od zera (det(A) ≠ 0).

Jeżeli układ jest układem Cramera, to istnieje macierz odwrotna $A^{-1}$ (**macierz A jest nieosobliwa**). Zatem, mnożąc lewostronnie równanie Ax = b przez $A^{-1}$, otrzymujemy:

$$\boldsymbol{A^{-1}Ax = A^{-1}b}$$

Ponieważ $\mathbf{A^{-1}A = I}$ oraz $\mathbf{Ix = x}$, więc rozwiązanie układu Cramera równań liniowych jest postaci:

$$\boldsymbol{x = A^{-1}b}$$

i jest jedynym rozwiązaniem tego układu.

Wzór ten pozwala znaleźć rozwiązanie układów Cramera równań liniowych, jeżeli istnieje macierz $A^{-1}$ i jest znana. **Metoda ta nazywana jest *metodą rozwiązywania układu Cramera za pomocą macierzy odwrotnej.***

## 6.3. METODA WYZNACZNIKOWA ROZWIĄZYWANIA UKŁADU CRAMERA

Niech układ **Ax=b** będzie układem Cramera **n** równań

Utwórzmy macierze $A_1$, $A_2$ , … , $A_n$ w taki sposób, że:

$A_1$ to macierz, w której pierwszą kolumnę A zastąpiono wektorem b,

$A_2$ to macierz, w której drugą kolumnę A zastąpiono wektorem b,

$A_3$ to macierz, w której trzecią kolumnę A zastąpiono wektorem b,

……….

$A_n$ to macierz, w której n-tą kolumnę A zastąpiono wektorem b.

Wtedy jedyne rozwiązanie tego układu może być uzyskane w następujący sposób

$$x_1 = \det(A_1)\,/\det(A),$$

$$x_2 = \det(A_2)\,/det(A),$$

$$x_3 = \det(A_3)\,/\det(A),$$

$$\ldots$$

$$x_n = \det(A_n)\,/\det(A)$$

<u>Przykład</u>: Sprawdzanie warunków twierdzenia Kroneckera-Capelli'ego

Warunkiem koniecznym i wystarczającym do istnienia rozwiązania układu równań jest równość rzędu macierzy i rzędu macierzy uzupełnionej.

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = 4 \\ 3x + 2y - z = 1 \\ x - 4y + 7z = 5 \end{cases}$$

Szukamy rzędu macierzy poprzez operacje elementarne na wierszach i kolumnach (symbol ~ oznacza macierz przekształconą poprzez operacje elementarne):

$$(A) \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \; W_2 = W_2 + (-3)W_1; \;\; W_3 = W_3 + (-1)W_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -7 & 11 \\ 0 & -7 & 11 \end{bmatrix} \; W_3 = W_3 + (-1)W_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; W_2 = W_2 : (-7)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; W_1 = W_1 + (-3)W_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; Rząd\ A\ wysnosi\ 2\ [rz(A) = 2]$$

$$A^U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 7 & 5 \end{bmatrix} W_2 = W_2 + (-3)W_1; \;\; W_3 = W_3 + (-1)W_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & -7 & 11 & -11 \\ 0 & -7 & 11 & 1 \end{bmatrix} W_2 = W_2 : (-7)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{7} & \frac{11}{7} \\ 0 & -7 & 11 & 1 \end{bmatrix} W_1 = W_1 + (-3)W_2; \;\;\; W_3 = W_3 + 7W_2$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{5}{7} & -\frac{5}{7}\\ 0 & 1 & -\frac{11}{7} & \frac{11}{7}\\ 0 & 0 & 0 & 12\end{bmatrix} W_3 = W_3 : 12\ (zamieniamy\ K_4\ zK_3)$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{5}{7} & -\frac{5}{7}\\ 0 & 1 & -\frac{11}{7} & \frac{11}{7}\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} W_1 = W_1 + \frac{5}{7}W_3;\ \ W_2 = W_2 + (-\frac{11}{7})W_3$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -\frac{5}{7}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{7}\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} Rząd\ A^U\ wynosi\ 3.$$

Ponieważ **rz($A^U$) > rz(A)** więc układ nie ma rozwiązania (jest sprzeczny)

## 6.4. ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW RÓWNAŃ METODĄ OPERACJI ELEMENTARNYCH (NA WIERSZACH) (METODA JORDANO-GAUSSA)

Dokonując operacji elementarnych na układzie

$$\boldsymbol{Ax = b},$$

możemy go przekształcić w układ równoważny

$$\boldsymbol{Cx = d},$$

gdzie macierz C jest macierzą wierszowo zredukowaną macierzy A

Układ $Cx = d$ nazywamy postacią bazową układu $Ax = b$.

Postać bazowa$Cx = d$ jest jednoznacznie wyznaczoną przez macierz blokową $E = [C|d]$, którą otrzymujemy dokonując operacji elementarnych na wierszach macierzy uzupełnionej $A^U\ (= [A|b])$ . Z postaci bazowej układu można natychmiast odczytać rozwiązanie układu lub stwierdzić, że układ jest sprzeczny. Jeżeli układ równań jest nieoznaczony (tzn. rz(A) < n), to wśród rozwiązań wyróżniamy tzw. rozwiązanie **bazowe.** Rozwiązaniem bazowym układu równań liniowych nazywamy takie rozwiązanie, w którym wszystkie zmienne swobodne (niebazowe) są równe **zeru.**

**Przykładowe zadanie:**

Rozwiązanie układu równań metodą operacji elementarnych Jordano-Gaussa

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 3x + y + 2z = 11 \\ 2x + 3y + z = 11 \end{cases}$$

Przekształcamy związaną z układem macierz współczynników (obok macierzy opis operacji na wskazanych wierszach $W_i$ przekształcanych do wierszy $W_i'$).

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \end{array}\right] \; W_2 = W_2 + (-3)W_1; \;\; W_3 = W_3 + (-2)W_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -7 & -31 \\ 0 & -1 & -5 & -17 \end{array}\right] \; W_2 = W_2 + (-6)W_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 23 & 71 \\ 0 & -1 & -5 & -17 \end{array}\right] \; W_1 = W_1 + (-2)W_2; \; W_3 = W_3 + W_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -43 & -128 \\ 0 & 1 & 23 & 71 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \; W_3 = W_3 : 18$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -43 & -128 \\ 0 & 1 & 23 & 71 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \; W_1 = W_1 + 43W_3; \;\; W_2 = W_2 + (-23)W_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu równań w arkuszu EXCEL – układ oznaczony

| |
|---|
| 3x1+2x2+x3=4 |
| 2x1-x2+2x3=8 |
| 4x1-4x2-3x3=9 |

| x1 | x2 | x3 | b | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 4 | "W1/3" |
| 2 | -1 | 2 | 8 | |
| 4 | -4 | -3 | 9 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,7 | 0,3 | 1,3 | |
| 2 | -1 | 2 | 8,0 | "-W1*2+W2" |
| 4 | -4 | -3 | 9,0 | "-W1*4+W3" |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,7 | 0,3 | 1,3 | |
| 0 | -2,3 | 1,3 | 5,3 | "W2/(-2,3)" |
| 3 | -4,7 | -3,3 | 7,7 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,7 | 0,3 | 1,3 |
| 0 | 1 | -0,6 | -2,3 |
| 0 | -4,7 | -3,3 | 7,7 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0,7 | 2,9 |
| 0 | 1 | -0,6 | -2,3 |
| 0 | 0 | -6,0 | -3,0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0,71 | 2,9 |
| 0 | 1 | -0,6 | -2,3 |
| 0 | 0 | 1 | 0,5 |

| x1 | x2 | x3 | b | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 2,5 | =x1 |
| 0 | 1 | 0 | -2,0 | =x2 |
| 0 | 0 | 1 | 0,5 | =x3 |

Rozwiązanie układu równań w arkuszu EXCEL – układ sprzeczny

| |
|---|
| 3x1+2x2+x3=4 |
| 2x1-x2+2x3=8 |
| 5x1+x2+3x3=9 |

| x1 | x2 | x3 | b | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 4 | "W1/3" |
| 2 | -1 | 2 | 8 | |
| 5 | 1 | 3 | 9 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,7 | 0,3 | 1,3 | |
| 2 | -1 | 2 | 8,0 | "-W1*2+W2" |
| 5 | 1 | 3 | 9,0 | "-W1*5+W3" |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,7 | 0,3 | 1,3 | |
| 0 | -2,3 | 1,3 | 5,3 | "W2/(-2,3)" |
| 4 | 0,3 | 2,7 | 7,7 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,7 | 0,3 | 1,3 |
| 0 | 1 | -0,6 | -2,3 |
| 0 | 0,3 | 2,7 | 7,7 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0,7 | 2,9 |
| 0 | 1 | -0,6 | -2,3 |
| 0 | 5 | 0,0 | -3,0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0,7 | 2,9 |
| 0 | 1 | -0,6 | -2,3 |
| **0** | **0** | **0** | **0,5** |

Rozwiązanie układu równań w arkuszu EXCEL – układ nieoznaczony

| |
|---|
| 3x1+2x2+x3=4 |
| 2x1-x2+2x3=5 |
| 5x1+x2+3x3=9 |

| x1 | x2 | x3 | b | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 4 | "W1/3" |
| 2 | -1 | 2 | 5 | |
| 5 | 1 | 3 | 9 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,7 | 0,3 | 1,3 | |
| 2 | -1 | 2 | 5,0 | "-W1*2+W2" |
| 5 | 1 | 3 | 9,0 | "-W1*5+W3" |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,7 | 0,3 | 1,3 | |
| 0 | -2,3 | 1,3 | 2,3 | "W2/(-2,3)" |
| 0 | -2,3 | 1,3 | 2,3 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,7 | 0,3 | 1,3 |
| 0 | 1 | -0,6 | -1,0 |
| 0 | -2,3 | 1,3 | 2,3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0,7 | 2,0 |
| 0 | 1 | -0,6 | -1,0 |
| 0 | 0 | 0,0 | 0,0 |

| | |
|---|---|
| x1+0,7x3=2,0 | x1=-0,7x3+2,0 |
| x2-0,6x3=-1,0 | x2=0,6x3-1,0 |

x1=-0,7c+2,0
x2=0,6c-1,0
c- dowolna liczba rzeczywista

## 6.5. ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW RÓWNAŃ METODĄ NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW

Dla układu równań

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b},$$

który może być układem sprzecznym - nie istnieje wtedy taki wektor x, że $\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ można się interesować namiastką rozwiązania, czyli takimi wektorami x, że $\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}$ jest wektorem bliskim wektorowi 0, co można na przykład rozumieć poprzez to, że wektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}$
ma długość bliską 0, gdzie długość wektora$\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \dots, \boldsymbol{c_n})^{\boldsymbol{T}}$

$$\|\boldsymbol{c}\| = \sqrt{\boldsymbol{c_1^2} + \boldsymbol{c_2^2} + \cdots + \boldsymbol{c_n^2}} \quad .$$

Na płaszczyźnie: c=(x,y), długość wektora $\|\boldsymbol{c}\|$: $\sqrt{\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{y^2}}$

Poszukiwanie minimum

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{min_x}\|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|$$

prowadzi do wektora x, który jest rozwiązaniem układu $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{c}$, gdzie $\boldsymbol{A^T A} = \boldsymbol{B}$ $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{A^T b}$, a zatem przekształcamy układ $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ przemnażając go z lewej strony przez macierz $\boldsymbol{A^T}$ i otrzymujemy układ

$$\boldsymbol{A^T Ax} = \boldsymbol{A^T b}$$

lub

$$\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{c}$$

Układ ten jest zawsze niesprzeczny, a jego rozwiązanie pokrywa się z rozwiązaniem układu Ax=b, o ile ten jest niesprzeczny.

Rozwiązanie układu Bx=c nazywamy rozwiązaniem metody najmniejszych kwadratów (MNK) układu Ax=b

# ROZDZIAŁ VII

# ZADANIA

## 7.1. ZADANIA POWTÓRKOWE

Zadania ze szkoły średniej

**1.**Narysuj zgrubnie poprzez przesuniecie i przeskalowanie wykres funkcji

a) $\boldsymbol{y = 2sin(3x - \pi) + 4,}$ b) $\mathbf{y = \frac{3x-2}{4x-1}}$.

**2.** Rozwiąż nierówność

a) $\boldsymbol{4|x - 2| + |3x - 1| < 2|x| - 3},$ b) $\sqrt{\mathbf{x - 3}} < \mathbf{x^2 - 7.}$

**3.** Wykaż, że jeśli $\boldsymbol{a + b = 1}$ i $\boldsymbol{a^2 + b^2 = 7}$ to $\boldsymbol{a^4 + b^4 = 31}$

**4**. Dla danych punktów **A(1,4)** oraz **B(2,3)** na prostej o równaniu $\boldsymbol{x + y = 6}$ znajdź taki punkt C, że trójkąt ABC ma najmniejszy obwód.

**5.** Oblicz wartość $\sqrt[3]{\mathbf{2 + \sqrt{5}}} + \sqrt[3]{\mathbf{2 - \sqrt{5}}}$

**6.** Wyznacz wszystkie wartości parametru **m** , dla których równanie
$\boldsymbol{x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0}$ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste
$\mathbf{x_1}$ , $\mathbf{x_2}$ takie, że $(\mathbf{x_1 - x_2})^2 < 8(\mathbf{m + 1})$.

## 7.2. ZADANIA PRZEBIEG ZMIENNOŚCI FUNKCJI

Zbadaj przebieg zmienności funkcji:

1) $y=\frac{4x^3-x^4}{5}$ 2)$y=\frac{3(x-2)}{x+4}$

3) $y=\frac{3x(x-2)}{X+4}$ 4) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$

5) $y=\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2}$ 6) $y=\frac{e^x}{x}$

7)$y=\frac{x}{e^x}$ 8) $y=\ln(x^2+1)$

9) $y=xe^{\frac{1}{x}}$ 10) $y=\frac{\pi}{4}x-arctg(x)$

(użyj pomocniczo program wspomagający rysujący wykresy - na stronie http://www.graphcalc.com )

## 7.3. ZADANIA CAŁKI

### ZADANIA Z CAŁEK NIEOZNACZONYCH

**1.**$\int\left(x^3-3\sqrt[3]{x^5}+\frac{5}{x}\right)dx,$ **2.** $\int\frac{x^3+2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[5]{x}}dx,$ **3.**$\int\frac{2t^3-3t\sqrt[3]{t}+5t\sqrt[5]{t^2}}{t\sqrt{t}}dt,$ **4.** $\int\frac{(x^2-1)^2}{x}dx$

**5.**$\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}dx,$ **6.**$\int\frac{(x^2-1)^2}{x^2}dx,$ **7.** $\int(3+2\sqrt[4]{x})^3\,dx,$ **8.** $\int\frac{3*2^x-2*3^x}{2^x}dx$

**9.**$\int ctg^2x\,dx,$ **10.**$\int\frac{4-x}{2+\sqrt{x}}dx,$ **11.**$\int\frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}dx,$ **12.** $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx,$ **13.** $\int\frac{sin2x}{cosx}dx,$

### CAŁKOWANIE PRZEZ PODSTAWIENIE

14.$\int sin\frac{2x}{5}dx,$ 15.$\int\frac{1}{\sqrt[5]{2x+7}}dx,$ 16.$\int\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}dx,$ 17.$\int\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx,$ 18.$\int\frac{x}{\sqrt{1-9x^2}}dx,$

19.$\int\frac{5x}{1+x^4}dx,$ 20.$\int\frac{ln^3x}{x}dx,$ 21.$\int\frac{cosx}{1+4sin^2x}dx,$ 22.$\int\frac{2^x}{1+4^x}dx,$ 23.$\int\frac{1}{x(3lnx+5)}dx$

### CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI

24.$\int arcsinx\,dx,$ 25.$\int x^2sinx\,dx,$ 26.$\int x^2e^x\,dx,$ 27.$\int x^25^x\,dx,$ 28.$\int\frac{lnx}{\sqrt[3]{x}}dx,$

29.$\int ln^2x\,dx,$ 30.$\int xarctgx\,dx,$ 31. $\int\frac{x}{cos^2x}dx,$ 32.$\int\frac{ln^2x}{\sqrt{x}}dx,$ 33.$\int xtg^2x\,dx,$

34.$\int x^3e^{x^2}\,dx,$ 35.$\int xcos^2x\,dx,$

**CAŁKOWANIE FUNKCJI WYMIERNYCH**

36. $\int \frac{x^3+1}{x^2-4}dx$, 37. $\int \frac{x^5+1}{x^3-1}dx$, 38.$\int \frac{x^2+6x+5}{x^2-6x+5}$, 39.$\int \frac{x+5}{4x^2x+7}dx$, 40.$\int \frac{x^3+1}{x^2+4}dx$,

**CAŁKOWANIE FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH**

41. $\int \frac{cos^4x}{sinx}dx$, 42.$\int \frac{cos^3x}{sin^2x}dx$, 43. $\int sin^3xcos^3x\,dx$, 44.$\int sin^9x\,dx$, 45.$\int \frac{1}{1-sin^4x}dx$,

## ZADANIA Z CAŁEK OZNACZONYCH

**1.** $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1}dx$ **2.**$\int_0^2 \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$ **3.**$\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$, **4.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx$ **5.**$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-sin^2x}}dx$

**6.** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}dx$; **7.**$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$;

**OBLICZ POLE OBSZARU OGRANICZONEGO LINIAMI:**

**8.** $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$; **9.** $y^2 = 4x + 4$, $y = 2 - x$

**10.** $y = x^2$, $y\frac{x^2}{2}$, $y = 3x$

**OBLICZ DŁUGOŚĆ ŁUKU KRZYWEJ:**

**11. a)** $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ dla $x \in [0, a]$ , **b)** $y = \ln x$ dla x$\in \left[\sqrt{3}, 2\sqrt{2}\right]$

**OBLICZ OBJĘTOŚĆ BRYŁY POWSTAŁEJ PRZEZ OBRÓT DOOKOŁA OSI OX :**

**A. krzywej:**

**12.** $y = \ln x \quad dla\ x \in [1, e]$ **13.** $x^2 + (y-3)^2 = 1$

**B. figury płaskiej ograniczonej liniami:**

**14.**$y = x^2 \; y^2 = x$ **15.** $y^2 = 4 - 2x$, $x + y = 2$

**OBLICZ OBJĘTOŚĆ BRYŁY POWSTAŁEJ PRZEZ OBRÓT DOOKOŁA OSI OY :**

**A. krzywej:**

**16.** $x = \arccos y$ dla $y \in (0,1)$

**B. figury płaskiej ograniczonej liniami:**

**17.** $y^2 = x \quad -x + y + 2 = 0$ **18.** $x = 0$, $y = 1$, $y = \sin x \quad dla\ x \in [0, \pi]$ .

**OBLICZ POLE POWIERZCHNI BRYŁY POWSTAŁEJ PRZEZ OBRÓT DOOKOŁA OSI OX KRZYWEJ:**

**19.** $y = \sqrt{x+2} \quad dla\ x \in [1,2];$ .

**Całki niewłaściwe - oblicz:**

**20.** $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$ **21.** $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$ **22.** $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx$ **23.** $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$

**24.** $\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx$ **25.** $\int_1^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

## 7.4. ZADANIA MACIERZE I UKŁADY RÓWNAŃ

**1.** Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Wykonaj następujące działania oraz obliczenia - o ile są wykonalne

a) $AB$, $AB^T$, $A^TB$, $A + 3B^T$, $A^T + B$, $AB + C$, $AB + CC^T$, $CD$, $ACD$, $C^TC - D$,
b) $A^{-1}$, $D^{-1}$, $(C^TC)^{-1}$, $(CC^T)^{-1}$, $D^{-1}$, $\det(A)$, $\det(CC^T)$, $\det(D)$ oraz $\det(E)$,

gdzie $E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

**2.** Rozwiąż układy równań przy pomocy macierzy odwrotnych, metody wyznacznikowej (o ile jest to możliwe) oraz operacji elementarnych na macierzy uzupełnionej układu:

a)
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = -5$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 = 5$$

b)
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 17$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8$$
$$x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 9$$

c)
$$2x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 = 7$$
$$3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2$$

d) $2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 7$
$3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 2$

e) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$
$3x_1 - x_2 + x_3 = 1$
$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$
$x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0$

Studencie PAMIĘTAJ!

*"Matematyka jest miarą wszystkiego"*

*Arystoteles*

ISBN: 978-83-930742-5-9